

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 138-142

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__138_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1491.

(1884, p. 351.)

Trouver le lieu géométrique des points d'où l'on voit sous le même angle deux segments donnés de deux droites fixes.

Cas où les deux droites sont rectangulaires.

E. FAUQUEMBERGUE.

SOLUTION.

Par M. H. BROCARD.

Ce problème a été étudié et résolu par J. Steiner (*J. de Crelle*, 1852) comme l'a rappelé G. de Longchamps dans la solution qu'il a donnée (*J. de Math. spéc.*, 1886, p. 39-42) au titre de *Questions d'examens*, et *J. de Math. élém.*, 1886, p. 16-18, avec allusion à la question 1491 des *Nouv. Ann. de Math.*, ci-dessus énoncée.

Il suffira donc de résumer ces deux articles.

Soient OAB γ , OCD x les deux axes de coordonnées formant l'angle $\gamma O x = \theta$.

Désignons OC, OD, OA, OB par α , α' , β , β' .

On trouvera assez rapidement l'équation suivante de la courbe, lieu des points I pour lesquels angle AIB = angle CID :

$$\frac{(\alpha - \alpha')\gamma}{(\beta - \beta')x} = \frac{x^2 + \gamma^2 + 2x\gamma \cos \theta - (\alpha + \alpha')(x + \gamma \cos \theta) + \alpha\alpha'}{x^2 + \gamma^2 + 2x\gamma \cos \theta - (\beta + \beta')(\gamma + x \cos \theta) + \beta\beta'}.$$

(Ici une discussion, que j'omets, de signes à choisir.)

Le lieu se compose de deux cubiques circulaires, ayant, en outre des deux ombilics du plan, sept autres points communs : A, B, C, D, O et les deux points d'intersection des circonférences décrites sur AB et CD pour diamètres (J. Steiner).

On en déduit plusieurs cas particuliers :

1° Celui des segments AB et CD sur une même droite δ . Les cubiques dégénèrent en deux cercles et en la droite δ (J. Steiner);

2° Celui des segments AB et CD à angle droit. On fera donc $\cos \theta = 0$ dans l'équation ci-dessus;

3° Les deux segments ont une extrémité commune (en O). Le lieu devient une strophoïde oblique, ayant O pour point double et tangente en ce point aux deux bissectrices de l'angle θ (P.-H. SCHOUTE, *J. de Crelle*, 1885, p. 98-109).

Si $\theta = 90^\circ$, cette courbe se changera en strophoïde droite

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{x^2 + y^2 - \alpha x}{x^2 + y^2 - \beta y}.$$

Note. — D'autres noms pourraient être cités à l'occasion du même problème, G. Salmon, M. Chasles, H. Faure, O. Hermes, K. Kupper, C. Pelz, H. Schröter.

Je remarquerai seulement que, par hasard, les pages 351-352 du présent journal, où se trouve posée la question 1491, sont suivies d'un article de M. E. Habich, *Sur un système particulier de coordonnées curvilignes*, p. 353-367, où est exposée une méthode de résolution de cette question considérée dans ses relations manifestes avec le problème de Pothenot ou de la Carte.

M. E. Habich a pareillement fait allusion à une extension à l'espace et à la Navigation aérienne, si développée depuis, mais il semble qu'on ne puisse guère éviter une très grande complication et il me suffira d'y renvoyer le lecteur.

1630.

(1892, p. 14*.)

Dans tout triangle, dont les côtés sont en progression géométrique, il y a égalité entre le cercle circonscrit et le cercle osculant la potentielle au centre de gravité.

E. CESARO.

SOLUTION.

Par M. H. BROCARD.

Si la solution s'est un peu fait attendre, c'est certainement à cause d'un petit piège habilement dissimulé dans l'énoncé. En effet, la potentielle triangulaire, lieu de points conjugués

isogonaux, est, en principe, une courbe transcendante, où l'on a quelque embarras à soupçonner une courbure mesurable, mais la possibilité apparaîtra mieux lorsqu'on aura vérifié que pour le triangle particulier, dit *moyen en α* , dont les trois côtés $c = af$, $a, \frac{a}{f} = b$ sont en progression géométrique, d'où $a^2 = bc$, la potentielle cesse d'être transcendante, devient algébrique, et représente l'ellipse de Steiner d'un certain triangle.

La question se simplifie alors dans les termes suivants :

On donne un triangle ABC et une ellipse, tangente en B et C aux côtés AB, AC et passant par le barycentre G. Le rayon de courbure en ce point est le même que celui du cercle circonscrit au triangle, si ledit triangle est *moyen en α* .

Ainsi transformée, la question 1630 devient facile à traiter par l'analyse.

Prenons pour axes de coordonnées rectangulaires Ay et AGDx.

Soient E, F les projections de B, C sur Ax; AD = l, DE = DF = m, BE = CF = d.

On aura

$$\text{aire } S = l d = \frac{abc}{4R};$$

mais

$$bc = a^2,$$

donc

$$R = \frac{a^3}{4ld}.$$

D'autre part, les droites AB, AC, BC ont respectivement pour équations

$$(AB) \quad y - \frac{dx}{l+m} = 0, \quad \gamma,$$

$$(AC) \quad y + \frac{dx}{l-m} = 0, \quad \beta,$$

$$(BC) \quad y - \frac{d}{m}(x-l) = 0, \quad \alpha.$$

L'ellipse tangente en B et C et passant par G, et qui a son

(141)

centre O sur AGDx, est représentée par l'équation .

$$\beta\gamma + \lambda x^2 = 0,$$

λ étant déterminé par la condition $G(x = l, y = 0)$.

On trouve ainsi l'équation

$$l^2 y^2 + 3(m y - dx)^2 + 8l d(m y - dx) + 4l^2 d^2 = 0.$$

Pour $y = 0$, on a

$$3x^2 - 8lx + 4l^2 = 0,$$

d'où

$$x_1 = \frac{2}{3} l, \quad x_2 = 2l,$$

qui représentent le point G, et le point A', quatrième sommet du parallélogramme ABA'C.

Le centre O $\left(x = \frac{4l}{3}\right)$ est le barycentre G' du triangle A'BC symétrique du proposé par rapport à D.

Mais la tangente en A' est parallèle à la tangente en G ou à BC; par suite, l'ellipse est inscrite au triangle AB'C' dont les côtés AB' et AC' sont doubles de AB et de AC. C'est donc une ellipse de Steiner, ayant son centre en G', barycentre des triangles A'BC et AB'C'.

C'est, plus simplement, une projection de la configuration du triangle équilatéral et de ses cercles inscrit et circonscrit. On en conclut que l'ellipse passe aussi par les barycentres des triangles BA'B', CA'C'.

Quant à sa dérivation de la potentielle triangulaire, il suffit d'observer que celle-ci a pour équation, en coordonnées normales,

$$(\alpha\alpha)^{\log \frac{b}{c}} (b\beta)^{\log \frac{c}{a}} (c\gamma)^{\log \frac{a}{b}} = 1,$$

qui se réduit lorsque α, b, c vérifient la relation

$$\alpha^p + q = b^p c^q,$$

ce qui est le cas pour le triangle moyen en α .

La potentielle est alors une conique tangente aux côtés b et c aux points C et B.

Il reste donc à évaluer la courbure de l'ellipse au point G.

(142)

On trouve aisément

$$y'_G = \frac{d}{m},$$

c'est-à-dire la tangente parallèle à BC, et ensuite

$$y''_G = -\frac{l d}{2 m^2}.$$

Donc, en ce point, le rayon de courbure R_G a pour valeur (au signe près)

$$R_G = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{2(d^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{l d};$$

mais

$$d^2 + m^2 = \frac{a^2}{4}$$

et

$$l d = \frac{a^3}{4 R},$$

donc

$$R_G = \frac{8 a^3 R}{4^{\frac{3}{2}} a^3} = R.$$

Note. — Il est juste d'observer qu'une étude de Cesaro, *Sur la potentielle triangulaire*, parue ici, 1888, p. 257-268, contient manifestement le germe de la question 1650 qu'il proposa en 1892.