

Certificats d'analyse infinitésimale

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 117-122

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__117_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Expliquer comment on détermine une transformation de contact dans l'espace à trois dimensions sachant qu'entre les coordonnées ponctuelles de deux éléments correspondants n'existe qu'une relation qu'on suppose connue. Donner un exemple.*

II. *On considère une équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$(1) \quad f(x, y, z, p, q) = 0.$$

1° *Quelle est la forme la plus générale de cette équation quand les développables caractéristiques sont des cônes ayant leur sommet sur Ox .*

2° *On désigne par M un point d'une surface intégrale, par A le point où le plan tangent en M coupe Ox et par MT la tangente en M à la courbe caractéristique qui passe par ce point sur la surface considérée.*

Quelle est la forme la plus générale de l'équation (1) pour que MA et MT soient rectangulaires pour tout point M de toute surface intégrale.

3° *Trouver la forme la plus générale de l'équation (1) pour que les deux conditions précédentes (1° et 2°) soient simultanément vérifiées et montrer que dans ce cas les courbes caractéristiques sont des lignes de courbure pour les surfaces intégrales.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver les caractéristiques de l'équation*

$$2z - p_1x_1 - p_2x_2 - 3p_3x_3 - 2x_1^2p_3^2 = 0$$

et déterminer l'intégrale de cette équation qui, pour $x=1$,

se réduit à

$$z = -\frac{1}{4} x_3^2.$$

(Juin 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Établir le théorème d'existence des intégrales d'un système Jacobien d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires et homogènes à une fonction inconnue, le nombre des équations étant inférieur au nombre des variables (systèmes complets). Forme de l'intégrale générale.

II. Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$z = f(x_1, p_1) + \varphi(x_2, p_2) + \psi(x_3, p_3),$$

où f, φ, ψ sont trois fonctions données et z une fonction inconnue de x_1, x_2, x_3 , montrer que la recherche d'une intégrale complète de cette équation se ramène à l'intégration de trois équations différentielles ordinaires du premier ordre. Application à

$$z = p_1 x_1 + p_1^2 + 1 + p_2 \tan x_2 + \frac{1}{2} p_3 x_3 + \frac{2x_3}{p_3}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère une transformation de contact dans l'espace, telle que les coordonnées (x, y, z) et (X, Y, Z) de deux points correspondants quelconques soient liées par la relation

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = z^2$$

et que, réciproquement, deux points liés par cette relation puissent être considérés comme se correspondant dans la transformation pour un choix convenable de p, q, P, Q .

Déduire de là les expressions de X, Y, Z, P, Q en fonctions de x, y, z, p, q .

Soit S la transformée d'une surface s parcourue par le point (x, y, z) et soit M un point de S correspondant à un point m de s . Quelle relation existe-t-il entre les angles Ω et ω que font les plans tangents en M à S et en m à s avec le plan des x, y . Quelle sera la surface S si s se réduit à une droite; même question si s se réduit à un cercle dont le plan est parallèle au plan des x, y ?

(Novembre 1913.)

Grenoble.COMPOSITION. — *Étant donnée l'équation*

$$(1) \quad \beta yx^2p - \alpha xy^2q = z(\beta y^2 - \alpha x^2) :$$

- 1° *Trouver l'intégrale générale de cette équation;*
 2° *Trouver une surface intégrale qui admette les caractéristiques pour l'un de ses systèmes de lignes asymptotiques, et déterminer l'autre système de ces lignes;*
 3° *Trouver une surface intégrale qui passe par la courbe*

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad z = b.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$(y^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = y[ny'^2 + (n+1)y^2 + yy''].$$

(Juillet 1913.)

Marseille.

COMPOSITION ÉCRITE (Durée : quatre heures). — *Une surface S étant rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, et p et q étant les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, on mène en un point M de coordonnées x, y, z le plan tangent et la normale à la surface. L'axe des z est rencontré par le plan tangent et la normale en un point Q.*

1° *Déterminer les distances OP et OQ de l'origine O aux points P et Q.*

2° *En posant*

$$OP = -u, \quad p^2 + q^2 = \rho^2, \quad \text{arc tang } \frac{q}{p} = \omega,$$

déterminer la distance OQ en fonction des variables u, ρ et ω .

3° *Déterminer les surfaces pour lesquelles les points P et Q sont symétriques par rapport à l'origine O en exprimant dans ce cas x, y et z en fonction de ρ et de ω .*

SOLUTION.

On a

$$OP = z - px - qy = -u,$$

$$Z = OQ = \frac{1}{p^2 + q^2} [px + qy + (p^2 + q^2)z].$$

On a ensuite

$$x = \frac{\partial u}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial q}, \quad z = p \frac{\partial u}{\partial p} + q \frac{\partial u}{\partial q} - u,$$

$$p \, dp + q \, dq = \rho \, d\rho,$$

$$p \, dq - q \, dp = \rho^2 \, d\omega,$$

d'où l'on tire

$$p \frac{\partial u}{\partial p} + q \frac{\partial u}{\partial q} = \rho \frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

Mais on a

$$(p^2 + q^2)Z = px + qy + (p^2 + q^2)z,$$

on a donc pour $Z - u = 0$

$$(p^2 + q^2 + 1) \left(p \frac{\partial u}{\partial p} + q \frac{\partial u}{\partial q} \right) = 2(p^2 + q^2)u$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} (1 + \rho^2) = 2\rho u.$$

En intégrant, on a, avec une fonction f arbitraire,

$$u = (1 + \rho^2) f(\omega).$$

En portant les valeurs de u , p et q dans x , y et z , il vient enfin

$$x = 2\rho^2 f(\omega) \cos \omega - \frac{1 + \rho^2}{\rho} f'(\omega) \sin \omega,$$

$$y = 2\rho^2 f(\omega) \sin \omega + \frac{1 + \rho^2}{\rho} f'(\omega) \cos \omega,$$

$$z = (\rho^2 - 1) f(\omega).$$

ÉPREUVE PRATIQUE (Durée : deux heures). — 1° *Vérifier que l'équation différentielle*

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} = 4y = 18 x e^{2x}$$

admet une intégrale de la forme

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + mx + n)e^{2x}$$

renfermant deux constantes arbitraires m et n ;

2° Calculer l'intégrale générale;

3° Déterminer les constantes de l'intégrale générale de sorte qu'elle devienne par rapport à x un infiniment petit d'ordre supérieur au second;

4° Vérifier qu'on obtient alors un infiniment petit du quatrième ordre et calculer sa partie principale.

SOLUTION.

On trouve

$$y = e^{2x}(x^3 - x^2 + \alpha x + \beta) + Ce^{-x}.$$

En posant $\beta = -\frac{2}{9}$, $\alpha = \frac{2}{3}$, $C = \frac{2}{9}$, on a $y = \frac{3}{4}x^4 + \dots$

(Novembre 1913.)

COMPOSITION ÉCRITE. — Déterminer les développantes et les développées de la courbe définie en coordonnées rectangulaires par les équations paramétriques

$$x = \frac{\sqrt{2 \sin^2 t}}{\cos t} - \sqrt{2}(1 - \cos t),$$

$$y = \frac{\sin^3 t}{\cos t} - \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right),$$

$$z = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

SOLUTION.

On trouve sans difficulté les 9 cosinus du trièdre mobile, les rayons de courbure qui sont égaux au signe près, l'arc, les développantes et les développées par des équations paramétriques où tout est intégré. La courbe est une hélice tracée sur un cylindre transcendant.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étudier la variation de la fonction $u = \cos z$ lorsque le point z décrit l'axe des y dans le plan des z . Soit z_0 un point pris sur cet axe, et soit v_0

la valeur correspondante choisie dans les significations de $v_0 = \log \cos z_0$, développer la fonction $v = \log \cos z$ qui prend la valeur v_0 pour $z = z_0$. Calculer les premiers termes et fixer le cercle de convergence de cette série.

On admettra que $\cos z$ n'a pas d'autres zéros que $\cos x$ réel.

SOLUTION.

$$v = \log \operatorname{sh} y_0 - \frac{\operatorname{sh} y_0}{\operatorname{ch} y_0} (z - z_0) - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 y_0} (z - z_0)^2 + \dots;$$

$$R^2 = y_0^2 + \frac{\pi^2}{4}.$$

(Juin 1914.)