

J. HAAG

Note sur la torsion

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 108-112

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__108_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'36]

NOTE SUR LA TORSION;

PAR M. J. HAAG,

Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

Imaginons une courbe (C), définie comme arête de rebroussement de l'enveloppe du plan

(1) $Ax + By + Cz + D = 0,$

où A, B, C, D sont des fonctions données d'un paramètre t .

Proposons-nous de calculer la torsion $\frac{1}{T}$ de cette courbe. On sait que les coordonnées x, y, z du point de contact du plan (1) avec (C) sont définies par l'équation (1) et les suivantes :

$$(2) \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

$$(3) \quad A''x + B''y + C''z + D'' = 0,$$

les accents étant des indices de dérivation par rapport à t . Cela posé, désignons par $(a, b, c), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale. Cette dernière droite est perpendiculaire au plan (1); on a donc

$$(4) \quad a_2 = \lambda A, \quad b_2 = \lambda B, \quad c_2 = \lambda C,$$

avec

$$(5) \quad \lambda^2 = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Écrivons maintenant les formules de Frenet :

$$(6) \quad \frac{da_1}{ds} = \frac{a_1}{T}, \quad \frac{db_1}{ds} = \frac{b_1}{T}, \quad \frac{dc_1}{ds} = \frac{c_1}{T}.$$

Multiplions-les respectivement par a_1, b_1, c_1 et ajoutons. Il vient

$$(7) \quad \frac{1}{T} = a_1 \frac{da_1}{ds} + b_1 \frac{db_1}{ds} + c_1 \frac{dc_1}{ds}.$$

Or, on sait que

$$a_1 = cb_2 - bc_2, \quad b_1 = ac_2 - ca_2, \quad c_1 = ba_2 - ab_2.$$

La formule (7) s'écrit, dès lors,

$$(8) \quad \frac{1}{T} = \begin{vmatrix} \frac{da_2}{ds} & \frac{db_2}{ds} & \frac{dc_2}{ds} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2}{s'^2} \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Or, les équations (1), (2), (3), dérivées totalement par rapport à t , entraînent les suivantes :

$$(9) \quad Ax' + By' + Cz' = 0,$$

$$(10) \quad A'x' + B'y' + C'z' = 0,$$

$$(11) \quad A''x' + B''y' + C''z' = -(A'''x + B'''y + C'''z + D''') = k,$$

k étant obtenu par élimination de x, y, z entre (1), (2), (3) et (11), ce qui donne

$$(12) \quad k = -\frac{\Delta}{\delta},$$

en posant

$$(13) \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Si nous résolvons maintenant le système (9), (10), (11) par rapport à x', y', z' , nous avons

$$(14) \quad x' = \frac{k}{\delta} (BC' - CB'), \quad y' = \frac{k}{\delta} (CA' - AC'),$$

$$z' = \frac{k}{\delta} (AB' - BA').$$

Portant dans (8) et développant suivant la dernière ligne, il vient

$$(15) \quad \frac{1}{T} = -\frac{\lambda^2}{s'^2} \frac{k}{\delta} [(BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2].$$

Mais, si l'on élève les équations (14) au carré et qu'on les ajoute, on voit que le crochet de (15) égale $\frac{\delta^2}{k^2} s'^2$. Finalement, (15) devient

$$\frac{1}{T} = -\frac{\lambda^2 \delta}{k}$$

ou, en tenant compte de (5) et (12),

$$(16) \quad \frac{1}{T} = \frac{\delta^2}{(A^2 + B^2 + C^2) \Delta}.$$

On peut aussi établir cette formule, en partant de la formule bien connue

$$(17) \quad \frac{1}{T} = \frac{- \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y' z'' - z' y'')^2 + (z' x'' - x' z'')^2 + (x' y'' - y' x'')^2}.$$

On a, en dérivant (9) et tenant compte de (10),

$$(18) \quad A x'' + B y'' + C z'' = 0.$$

Dérivons cette équation, ainsi que (10) et tenons compte de (11); nous obtenons

$$(19) \quad A x''' + B y''' + C z''' = -(A' x'' + B' y'' + C' z'') = k.$$

Les équations (9), (18), (19), résolues par rapport à A, B, C, nous donnent

$$(20) \quad A = \frac{k(y' z'' - z' y'')}{D}, \quad B = \frac{k(z' x'' - x' z'')}{D}, \\ C = \frac{k(x' y'' - y' x'')}{D},$$

en désignant par D le déterminant qui est au numérateur de (17). La formule (17) peut alors s'écrire

$$(21) \quad \frac{1}{T} = - \frac{k^2}{D(A^2 + B^2 + C^2)} = - \frac{\Delta^2}{\delta^2 D(A^2 + B^2 + C^2)},$$

en tenant compte de (12).

Faisons maintenant le produit δD , lignes par lignes. On trouve, en tenant compte des équations (9), (10),

(11), (18), (19) et posant

$$A''x'' + B''y'' + C''z'' = \mu, \quad A'x''' + B'y''' + C'z''' = \rho,$$

$$A''x''' + B''y''' + C''z''' = \theta,$$

$$(22) \quad \delta D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & -k & \mu \\ k & \rho & \theta \end{vmatrix} = k^3 = -\frac{\Delta^3}{\delta^3}.$$

Portant dans (21), on retrouve la formule (16).