

C.-A. LAISANT

Sur le système d'équations indéterminées

$$x^2 + y = z^2, x + y^2 = t^2$$

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 106-108

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__106_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[119a]

SUR LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES

$$x^2 + y = z^2, \quad x + y^2 = t^2;$$

PAR M. C.-A. LAISANT.

Ce système, signalé dans l'*Algèbre* d'Euler (t. II, n° 239), a fait l'objet d'une question posée récemment dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* ⁽¹⁾. On demande s'il peut y avoir des solutions entières. L'impossibilité est presque évidente, en écrivant les deux équations :

$$\begin{aligned} y &= (z - x)x + (z - x)z, \\ x &= (t - y)y + (t - y)t; \end{aligned}$$

$z - x$ et $t - y$ sont des entiers positifs. En vertu de la première équation, $y > x$; en vertu de la seconde, $x > y$; d'où l'impossibilité, au moins en nombres entiers positifs.

Pour le cas de racines négatives, on n'a qu'à mettre les signes en évidence, d'où les deux systèmes

$$x^2 - y = z^2, \quad y^2 - x = t^2 \quad \text{et} \quad x^2 - y = z^2, \quad x + y^2 = t^2,$$

et une démonstration analogue à la précédente s'applique à chacun d'eux.

Le seul cas d'exception est celui où l'on a $x = z$ (ou bien $y = t$). Alors, $y = 0$, $x = z = t^2$, solution évidente.

On peut se proposer la recherche des racines com-

(1) N° 4418 (1914, p. 147), par M. T. ONO.

mesurables, s'il en existe, du système proposé. La solution est tout entière contenue dans les deux identités suivantes, qui n'en font qu'une, car la seconde se déduit de la première par la simple permutation des deux lettres :

$$\left[\frac{b(2a^2 + b)}{1 - 4ab} \right]^2 + \frac{a(2b^2 + a)}{1 - 4ab} = \left[\frac{a + b^2 - 2a^2b}{1 - 4ab} \right]^2,$$

$$\left[\frac{a(2b^2 + a)}{1 - 4ab} \right]^2 + \frac{b(2a^2 + b)}{1 - 4ab} = \left[\frac{b + a^2 - 2b^2a}{1 - 4ab} \right]^2.$$

En prenant pour a et b deux quantités commensurables arbitraires, positives ou négatives, et posant

$$x = \frac{b(2a^2 + b)}{1 - 4ab}, \quad y = \frac{a(2b^2 + a)}{1 - 4ab},$$

$$z = \frac{a + b^2 - 2a^2b}{1 - 4ab}, \quad t = \frac{b + a^2 - 2b^2a}{1 - 4ab},$$

on aura une solution du système proposé, en valeurs commensurables.

On peut remarquer que a et b représentent respectivement les différences $z - x$ et $t - y$.

Si l'on prend pour a et b des valeurs positives, il faudra, pour que les racines x et y soient positives, que l'on ait $ab < \frac{1}{4}$.

D'après l'une des remarques précédentes, on peut résoudre la question que voici, laquelle est entièrement déterminée : « Connaissant les différences $z - x$ et $t - y$, déterminer les quatre nombres x, y, z, t de telle sorte qu'on ait $x^2 + y = z^2, x + y^2 = t^2$. »

Il y aurait sans doute sur cette question d'intéressantes observations à faire. Je me borne, en terminant, à présenter trois exemples, correspondant aux trois cas possibles, savoir x et y positifs, négatifs ou de signes

contraires :

$$1^{\circ} \quad x = \frac{13}{12}, \quad y = \frac{5}{6}, \quad z = \frac{17}{12}, \quad t = \frac{3}{4};$$

$$\left(\frac{13}{12}\right)^2 + \frac{5}{6} = \left(\frac{17}{12}\right)^2,$$

$$\frac{13}{12} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

$$2^{\circ} \quad x = -\frac{8}{7}, \quad y = -\frac{9}{7}, \quad z = \frac{1}{7}, \quad t = \frac{5}{7};$$

$$\left(\frac{8}{7}\right)^2 - \frac{9}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^2,$$

$$-\frac{8}{7} + \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2.$$

$$3^{\circ} \quad x = \frac{3}{5}, \quad y = -\frac{1}{5}, \quad z = \frac{2}{5}, \quad t = \frac{4}{5};$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2,$$

$$\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2.$$