G. FONTENÉ

Sur une configuration connue (9 points, 9 droites)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 64-68
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__64_1>

[$K^1$13a]

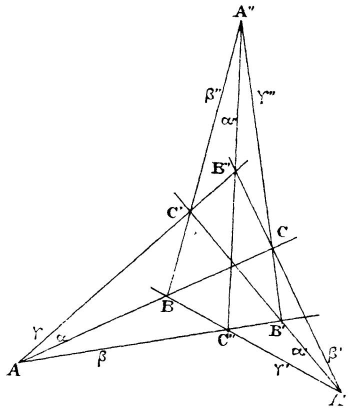
SUR UNE CONFIGURATION CONNUE (9 POINTS, 9 DROITES);

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette Note est relative à une configuration connue, dont il m'a paru intéressant d'étudier l'agencement; la figure 1 est empruntée aux Questions de Géométrie élémentaire de Desboves.

1. Étant donnés deux points A et A′ (*fig.* 1), si l'on

Fig. 1.



mène par A trois droites α, β, γ, et par A′ trois droites α', β', γ', les six droites α, β', γ, α', β, γ', sont les six côtés consécutifs d'un hexagone BCB″C′B′C″ dont les trois diagonales α'', β'', γ'' concourent en un point A″; c'est le théorème de Brianchon pour la conique formée des deux points A, A′.

Ou encore : Étant données deux droites α et α', si l'on prend sur α trois points A, B, C, et sur α' trois points A′, B′, C′, les six points A, B′, C, A′, B, C′ sont les six sommets consécutifs d'un hexagone dans lequel les points de rencontre A″, B″, C″ des couples de côtés opposés sont sur une même droite α''; c'est le théorème de Pascal pour la conique formée des deux droites α, α'.

[La droite α'' étant définie comme joignant les points B″ et C″, le point A″ étant défini comme le point de rencontre des droites β'' et γ'', le théorème consiste en ceci : la droite α'' passe au point A″, ou encore le point A″ est sur la droite α''; sous la première forme, cela résulte de ce que toutes les courbes du troisième ordre qui passent par huit points donnés passent par un neuvième point et, sous la seconde forme, cela résulte du fait corrélatif. C'est l'application à des cas particuliers de démonstrations bien connues pour les théorèmes de Pascal et de Brianchon.]

On a trois ternes de points et trois ternes de droites

$$(1)\left\{\begin{array}{l}(A,\ A',\ A''),\\(B,\ B',\ B''),\\(C,\ C',\ C'');\end{array}\right.\qquad(2)\left\{\begin{array}{l}(\alpha,\ \alpha',\ \alpha''),\\(\beta,\ \beta',\ \beta''),\\(\gamma,\ \gamma',\ \gamma'');\end{array}\right.$$

si l'on part des points, chacune des neuf droites qui joignent un point du premier terne à un point du second passe par un point du troisième, et ces neuf droites sur celle du tableau (2); *on a un énoncé corrélatif.* Les neufs alignements sont :

$$\begin{array}{ll}(ABC,\ A'B'C',\ A''B''C''), & \text{droites } (\alpha,\ \alpha',\ \alpha''),\\(AB'C'',\ A'B''C,\ A''BC'), & \text{droites } (\beta,\ \beta',\ \beta''),\\(AB''C',\ A'BC'',\ A''B'C), & \text{droites } (\gamma,\ \gamma',\ \gamma'');\end{array}$$

les trois lettres A, B, C sont affectées du même accent, ou de trois accents différents. Ces neuf alignements correspondent aux colonnes du tableau (1), aux termes positifs du déterminant symbolique donné par ce tableau, aux termes négatifs de ce même déterminant.

L'existence de neuf droites comprenant chacune trois points du tableau (1), *ou corrélativement l'existence de neuf points appartenant chacun à trois droites du tableau* (2), *forme neuf conditions qui se trouvent réduites à huit.* La figure dépend de dix paramètres.

2. *Les trois triangles*

$$BCA', \quad B'C'A'', \quad B''C''A$$

sont tels que le premier est inscrit au second, le second au troisième, le troisième au premier, attendu que le point B est sur la droite $C'A''$, le point C sur la droite $B'A''$, le point A' sur la droite $B'C'$, etc.; il en est de même des triangles

$$CAB', \quad C'A'B'', \quad C''A''B,$$

ou

$$ABC', \quad A'B'C'', \quad A''B''C.$$

Les trois triangles

$$BCA'', \quad B'C'A, \quad B''C''A'$$

sont tels que le premier est circonscrit au second, ...; il en est de même des triangles

$$CAB'', \quad C'A'B, \quad C''A''B',$$

ou

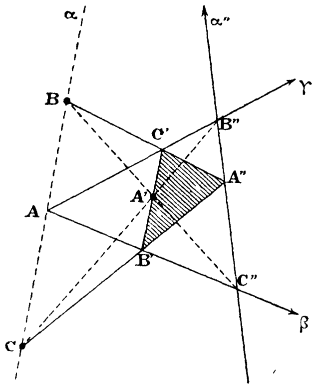
$$ABC'', \quad A'B'C, \quad A''B''C'.$$

Si l'on se donne les deux triangles BCA' *et* $B''C''A$ *dont le second est inscrit au premier, ce qui fait neuf paramètres, un triangle* $B'C'A''$ *peut varier en restant circonscrit au premier des deux triangles donnés et inscrit au second.*

Ce théorème est bien connu sous une autre forme, pour laquelle nous adopterons la disposition de la figure (2) :

On donne deux droites β, γ, *et deux points* B, C, *tels que la droite* α *joignant les deux points passe par le point* A *commun aux deux droites, et l'on considère un triangle variable* $B'C'A''$ *dont deux sommets* B' *et* C' *décrivent les deux droites fixes et* *dont les côtés opposés à ces sommets passent par les deux points fixes. Si le troisième côté α' passe par*

Fig. 2.



un point fixe A$'$, *le troisième sommet* A$''$ *décrit une droite fixe* α'' ; toutefois, quand le côté α' passe en A, le point A$''$ s'indétermine sur la droite α, qui est ainsi une partie parasite du lieu de ce point. La démonstration directe est aisée. On obtient deux points B$''$, C$''$ de la droite α'' en faisant passer la droite α' par l'un des points C, B; on a ainsi (le lieu ci-dessus étant étudié directement) une démonstration bien connue du théorème de Pascal pour la conique formée des deux droites α et α'', la droite de Pascal étant α'.

Corrélativement, *si le sommet* A$''$ *du triangle variable décrit la droite* α'', *le troisième côté* α' *passe par un point fixe* A$'$; toutefois, quand le sommet A$''$ vient sur α, le côté α' s'indétermine autour du point A. Etc.

Le triangle qui a pour côtés les droites β, γ, α'' décrites par les trois sommets du triangle variable est, comme on l'a déjà observé, inscrit au triangle qui a pour sommets les trois pivots B, C, A$'$.