Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 570-581

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__570_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

1° *Déterminer l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4x + \sin ax$$

en exposant sur cet exemple la méthode d'intégration des équations linéaires à coefficients constants.

2° *Déterminer les constantes arbitraires d'intégration de façon que la courbe représentant les variations de y soit tangente à l'origine à la droite $y = x$.*

3° *En supposant $a = 1$, étudier la forme de la courbe. Points d'inflexion. Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et les abscisses $x = 0$, $x = \pi$.*

4° *Que devient l'intégrale générale si $a = 2$.*

Épreuve pratique. — *La normale en un point* M *d'une courbe rencontre l'axe des x en* N.

1° *Déterminer les courbes telles que le rayon de courbure en un point quelconque soit proportionnel à la portion de normale* MN, $\rho = k.\ \mathrm{MN}$.

2° *Cas particuliers :* $k = \pm 1,\ \pm 2$.

(Novembre 1913.)

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *On considère une courbe plane* C_0 *qui, à l'égard d'un de ses points* O *convenablement choisi et à l'égard de deux droites* OX *et* OY *issues de ce point, jouit de la propriété suivante :*

Traçons le parallélogramme OAMB *ayant deux côtés contigus portés par* OX *et* OY *et ayant comme sommet* M *opposé à* O *un point* QUELCONQUE *de l'arc continu de la courbe partant de* O ; *l'aire du triangle mixtiligne compris entre les segments* OA, AM *et l'arc de courbe* OM *est dans un rapport constant* h *avec l'aire du parallélogramme. Former l'équation explicite de cette courbe* C_0.

2° *Parmi les courbes* C_0 *variables avec* h, *on considère une courbe* γ *qui, à l'égard d'un* second point particulier M_0 *de la courbe et à l'égard de deux droites particulières* M_0U *et* M_0V *issues de ce point, possède une propriété analogue à la première propriété relative à* O ; *en sorte que si* $M_0A'MB'$ *est un second parallélogramme, on aura avec un coefficient* k *analogue à* h, et quel que soit M,

$$\frac{\text{aire}\,M_0MA'}{\text{aire}\,M_0A'MB'} = k; \qquad \frac{\text{aire}\,OAM}{\text{aire}\,OAMB} = h.$$

En adoptant le système d'axe OX *et* OY, *on montrera que ces deux propriétés permettent l'élimination du rapport* $\frac{dy}{dx}$ *entre deux équations différentielles concernant les coordonnées* x *et* y *de* M ; *on effectuera cette élimination et l'on discutera sur l'équation résultante obtenue les cas où celle-ci sera ou ne sera pas une identité. Conclure de cette discussion la nature spéciale de la courbe* γ.

Épreuve pratique. — 1° *Calculer*

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{du\,dv}{(h^2 + a^2u^2 + b^2v^2)\sqrt{h^2 + a^2u^2 + b^2v^2}}.$$

2° *Aire de l'ellipse*

$$(5x + y)^2 + (4x + y)^2 = \frac{C^2}{\pi}.$$

(Juillet 1913.)

Épreuve théorique. — I. *On envisage les courbes planes dont une propriété*, supposée indépendante des axes de coordonnées, *se traduit par l'équation différentielle du second ordre*

$$(1) \qquad F(x, y; y', y'') = 0.$$

On sait d'autre part que chacune des courbes de la famille

$$(2) \qquad \varphi(x, y; \alpha) = 0 \qquad (\alpha \text{ paramètre variable})$$

possède la propriété indiquée.

La famille (2) *est supposée d'ailleurs ne pas représenter les diverses positions d'une courbe invariable dans un déplacement particulier.*

Démontrer, en quelques lignes, *que l'intégrale générale de l'équation* (1) *s'obtient alors immédiatement en donnant à chacune des courbes de la famille* (2) *un déplacement continu compatible avec la forme* (2).

On appliquera cette remarque au problème suivant :

II. 1° *Vérifier que le rayon de courbure* R *en un point* M *d'une conique est lié à la distance* p *de son centre* O *à la tangente et à la distance* r *du point* M *au centre* O *par la relation*

$$(3) \qquad R = \frac{K^2 - r^2}{p} \qquad (K^2 \text{ constante déterminée}).$$

2° *En s'appuyant sur la question précédente, trouver toutes les courbes planes qui jouissent de cette propriété à l'égard d'un point* O *pris pour origine des coordonnées.*

3° *Former effectivement l'équation différentielle qui* *traduit la propriété* (3), *la transformer en coordonnées polaires de pôle* O *et,* si l'on a le temps, *intégrer cette équation transformée.*

Épreuve pratique. — *Les deux bases respectives* (de longueurs $2a$ et $2b$) *d'un trapèze isoscèle sont distantes du centre de gravité de l'aire du trapèze de longueurs respectivement égales à p et à q.*

1° *Calculer a et b en fonction de p, de q et de la base moyenne* $2c$ *du trapèze ;*

2° *Calculer a et b en fonction de p, de q et de la largeur* 2γ *du trapèze estimée sur la parallèle à ses bases menée par le centre de gravité.* (Novembre 1913.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *A partir d'un point variable* P *sur* Ox *et d'abscisse u on mène le segment de longueur constante* $\mathrm{PM} = \lambda$ *faisant avec* Ox *l'angle* φ. *Si l'on suppose que u est une fonction donnée de* φ, *le point* M *décrit une courbe* C.

1° *Déterminer u en fonction de* φ *de manière qu'en tout point* M *de la courbe* C *la tangente soit précisément la droite correspondante* MP *et exprimer les coordonnées du point* M *en fonction de la seule variable* φ. *La fonction u de* φ *sera déterminée à une constante près qu'on déterminera de manière que pour* $\varphi = \frac{\pi}{2}$ *on ait* $u = 0$.

2° *La courbe* C *étant ainsi déterminée, trouver l'aire comprise entre cette courbe et l'axe* Ox.

3° *Calculer en fonction de* φ *le rayon de courbure en* M *de la courbe* C *et les coordonnées du centre de courbure* N. *Montrer que le point* N *se trouve sur la parallèle à* Oy *menée par le point* P.

4° *Trouver l'équation du lieu décrit par le point* N.

5° *Déterminer l'enveloppe du cercle variable ayant* N *comme centre et* NP *comme rayon.*

Épreuve pratique. — *On considère un pendule simple formé d'un poids* $\mathrm{M} = 10$ *kilogrammes, placé à l'extrémité d'une tige rigide* OM *sans masse de longueur l oscillant* *autour d'un point* O. *La durée d'oscillation du pendule, exprimée en secondes, est égale à* $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, *l exprimée en mètres*, $g = 9^{m},80650$ *à Bordeaux. On suppose l telle que cette durée d'oscillation est égale à* une *seconde.*

On ajoute un curseur C *de masse* $\mu = 10$ *grammes, de dimensions infiniment petites, mobile le long de la tige entre* O *et* M, *si* x *est sa distance au point* O, *la durée d'oscillation devient*

$$T = \pi\sqrt{\frac{Ml^2 + \mu x^2}{g(Ml + \mu x)}}.$$

1° *Étudier la variation de* T *quand on fait varier la position du curseur entre* O *et* M.

2° *Étant donnée une valeur quelconque mais fixe de* x, *on peut mettre l'expression de* T *sous la forme*

$$T = 1 + A\left(\frac{\mu}{M}\right) + B\left(\frac{\mu}{M}\right)^2 + C\left(\frac{\mu}{M}\right)^3 + \ldots$$

(formule de Maclaurin où T est considéré comme fonction du rapport $\frac{\mu}{M}$). *Calculer les expressions des deux premiers coefficients* A *et* B. (Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *On considère l'équation différentielle*

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 y = 0,$$

où p *et* q *sont des fonctions données de* x. *On suppose que cette équation admet simultanément comme intégrales particulières une certaine fonction inconnue* z *et sa* $n^{\text{ième}}$ *puissance* z^n $(n > 0)$.

1° *Déterminer cette intégrale inconnue* z (z *n'est déterminée qu'à un facteur constant près*).

2° *Quelle relation doit exister entre les fonctions* p *et* q *pour que la condition de l'énoncé soit satisfaite et, supposant* p *seule donnée, en conclure l'expression de* q.

3° *On fait le changement de variable indépendante* *défini par*

$$t = \int_0^x e^{-p}\, dx,$$

t devenant la nouvelle variable indépendante, que devient l'équation différentielle proposée (1), *y étant regardée comme fonction de t par l'intermédiaire de x, p et q restant liés par la relation précédemment trouvée, mais devenant à leur tour des fonctions de t par l'intermédiaire de x.*

II. *Intégration des équations différentielles du premier ordre linéaires par rapport à y et* $\frac{dy}{dx}$; *montrer qu'on peut ramener à ces équations celles de la forme*

$$\frac{dy}{dx} + uy + vy^m = 0,$$

u et v désignant des fonctions données de x.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer à* 0,0001 *près l'intégrale définie*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx.$$

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit* OA *un axe faisant avec* O*x l'angle variable* θ *et portant un vecteur* OP *dont l'équivalent algébrique par rapport à* OA *est donné par*

$$OP = p = f(\theta),$$

$f(\theta)$ *étant une fonction donnée.*

Par P *on mène une perpendiculaire* PB *à* OA; *la droite* PB, *quand* θ *varie, enveloppe une certaine courbe* C *qu'elle touche en* Q.

1° *Calculer, en fonction de* θ, *les coordonnées du point* Q *ainsi que l'équivalent algébrique du vecteur* PQ *par rapport à l'axe* PB *faisant avec* O*x l'angle* $\theta + \frac{\pi}{2}$.

2° *Calculer le rayon de courbure* R *en* Q *de l'enveloppe* C *en fonction de l'angle* θ.

3° *Quelles doivent être les formes de la fonction* $f(\theta)$ *pour que l'on ait :* 1° $R = \text{const.}$; 2° $R = a \cos\theta$?

Question de cours. — II. *Établir la formule du changement de variable dans le calcul d'une intégrale définie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer*

$$\int_0^1 \frac{-6x}{(1+x^2)^4} \mathrm{L}(x)\,dx.$$

(Juin 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que si la série entière*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

est convergente pour une valeur $x = x_0$, *la série dérivée*

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

est convergente pour toute valeur de x *telle que* $|x| < |x_0|$.

II. *Soit l'équation différentielle*

$$(1) \qquad y'' + py' + qy = 0,$$

où p *et* q *sont des fonctions de* x. *On suppose que cette équation admet une intégrale particulière* y *telle que sa dérivée* y' *soit aussi une intégrale de la même équation :* 1° *Déterminer cette intégrale;* 2° *Trouver la condition à laquelle doivent satisfaire les fonctions* p *et* q; 3° *Application à l'équation*

$$(2) \qquad y'' + \frac{4x}{(x-x^2)(1+x^2)} y' - \frac{1+3x^2}{(1-x^2)(1+x^2)^2} y = 0;$$

4° *Montrer que si la dérivée de toute intégrale de l'équation* (1) *est aussi une intégrale de la même équation,* p *et* q *sont des constantes.*

N. B. — *On ne cherchera pas à vérifier que les coefficients* p *et* q *de l'équation* (2) *satisfont à la condition générale précédemment trouvée. On calculera simplement l'intégrale* y (*supposée exister*) *dont la dérivée est aussi une intégrale et l'on vérifiera directement que* y *et* y' *sont bien des intégrales de l'équation* (2).

Épreuve pratique. — *Soit l'ellipse* E *dont l'équation en coordonnées polaires s'écrit*

$$r = \frac{16}{5 - 3\cos\theta}.$$

On mène par l'origine F *deux rayons vecteurs* FP, FQ *faisant respectivement avec l'axe* Fx *les angles* α *et* β. 1° *Calculer l'aire comprise entre l'ellipse et ces deux rayons vecteurs;* 2° *l'angle* α *étant seul donné et choisissant* β *de manière que*

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4},$$

exprimer cette aire en fonction de α. *Quelle valeur faut-il donner à* α *pour que l'aire considérée soit égale au quart de celle de l'ellipse?* (Novembre 1913.)

Caen.

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$xy' - y = k(yy' + x), \tag{1}$$

où k *désigne une constante donnée.*

2° Ox *et* Oy *étant deux axes rectangulaires*, M *un point variable d'une courbe intégrale* (C) *de l'équation* (1), T *le point de rencontre avec* Oy *de la tangente en* M *à* (C), N *le point de rencontre avec* Ox *de la normale en* M *à* (C), *montrer que le triangle* OTN *reste semblable à un triangle fixe.*

3° *Former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes intégrales* (C) *de l'équation* (1). *Expliquer le résultat obtenu.*

4° *Former en coordonnées polaires l'équation différentielle des courbes* (C). *Construire l'une de ces courbes.*

II. 1° *Déterminer la constante* λ *de façon que l'expression*

$$\frac{x + \lambda y}{(x - y)^3}\,dx - \frac{\lambda x + y}{(x - y)^3}\,dy$$

soit la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$. *Calculer toutes les fonctions* $U(x, y)$, *et déterminer parmi elles la fonction* $U_1(x, y)$ *qui prend la valeur* -1 *lorsqu'on donne simultanément à* x *et* y *les valeurs respectives*

$$x = 1, \qquad y = 0.$$

2° *On considère la surface*

$$z = U_1(x, y)$$

rapportée à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. *Étudier les sections de cette surface par des plans parallèles aux plans coordonnés. Déterminer les génératrices rectilignes de la surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère :*

1° *L'ellipse ayant pour axes de symétrie* Ox, Oy, *et pour sommets deux points* A, B, *respectivement situés sur* Ox, Oy, *et tels que*

$$OA = 10 \text{ mètres}, \qquad OB = 5 \text{ mètres}.$$

2° *L'hyperbole ayant pour axes de symétrie* Ox, Oy; *pour foyer le point* A, *et pour sommet le milieu* A' *du segment* OA.

I. *Calculer, à un décimètre carré près, l'aire qui se trouve à la fois à l'intérieur de l'ellipse et entre les deux branches de l'hyperbole.*

II *Calculer, à un décimètre cube près, le volume engendré par cette aire tournant autour de* Ox.

III. *En désignant par* P *et* P' *les deux points d'intersection de l'ellipse avec la branche d'hyperbole qui passe par* A', *calculer l'abscisse du centre de gravité de l'aire, supposée homogène, que limitent l'arc d'ellipse* PAP' *et l'arc d'hyperbole* PA'P'. (Novembre 1913.)

Clermont.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Construire la courbe définie par les équations paramétriques*

$$(1) \qquad x = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \qquad y = 2 \operatorname{ch} t.$$

2° *Soient* M *un quelconque de ses points*, C *le centre de courbure correspondant*, N *et* T *les points où la normale et la tangente rencontrent respectivement* Ox. *Démontrer qu'on a*

$$\overline{\mathrm{MT}}^2 = \overline{\mathrm{MN}}\;\overline{\mathrm{MC}}. \tag{2}$$

3° *Soit* M′ *un autre point de la courbe situé du même côté que* M *par rapport à* Oy. *Calculer, en fonction des ordonnées de* M *et de* M′, *la longueur de l'arc* MM′, *ainsi que son moment d'inertie et son rayon de giration par rapport à* Ox, *en le supposant homogène et de densité linéaire égale à* 1.

4° *On suppose que l'axe* Oy *est placé verticalement, le sens positif étant dirigé vers le bas. Un point matériel pesant, assujetti à glisser sans frottement le long de la courbe, est abandonné sans vitesse initiale à partir du point situé sur* Oy. *Calculer le temps qu'il met pour s'abaisser d'une longueur égale à* 1 *au-dessous de son niveau primitif. L'unité de longueur est le mètre et l'on prend* $g = 9^{\mathrm{m}},81$.

N. B. — *On rappelle les formules*

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = (1 + x)\cos 2x + e^x.$$

(Novembre 1913.)

Dijon.

Épreuve écrite. — *Soient trois axes rectangulaires* Oxyz *et une sphère de centre* O *et de rayon* a; *on considère sur cette sphère une courbe* C *telle que la portion de chaque tangente comprise entre le point de contact* M *et le point* T *où cette droite coupe le plan* Oxy *soit constamment égale au rayon* a.

1° *Soient* ρ *et* ω *les coordonnées polaires d'un point* M *de la courbe* C′, *projection de* C *sur* Oxy; *trouver la relation différentielle qui lie* ρ *et* ω.

2° *Exprimer* ρ, *puis* ω, *en fonction de l'angle* V *que fait la tangente en* M' *avec le rayon vecteur.* (*On rappelle la formule* $\operatorname{tang} V = \frac{\rho\omega'}{\rho'}$.)

3° *Indiquer la forme de* C'.

4° *Calculer, à l'aide de* V, *l'aire du secteur limité par un arc donné* AB *de* C' *et par les rayons* OA *et* OB.

5° *On développe sur un plan le cylindre dont* C' *est la section droite. Quelle est la transformée de* C?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'équation différentielle*

$$xy'' - y' - 4x^3y = 0.$$

1° *Représenter, par une série entière en* x, *l'intégrale* $\varphi(x)$ *qui prend la valeur* 1 *pour* $x = 0$, *sa dérivée seconde s'annulant pour* $x = 0$. *Démontrer que cette série converge quel que soit* x. *Calculer la somme.*

2° *Déduire de* $\varphi(x)$ *la solution générale de l'équation différentielle donnée.* (Juillet 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Première question. — *On considère, dans un système d'axes rectangulaires* xOy, *les courbes représentées par l'équation*

$$(1) \qquad (t^2 - 1)(x^2 + y^2) - 2t^3x - 2y = 0,$$

où t *est un paramètre arbitraire. Que représente cette équation?*

Construire le lieu (C) *du centre de la courbe* (1).

Étudier l'enveloppe (E) *de la courbe* (1). *On formera l'équation de* (E) *en coordonnées cartésiennes, en coordonnées polaires; on exprimera les coordonnées d'un point de* (E) *en fonction de* t. *On indiquera comment* (E) *peut se déduire géométriquement de* (C). *Dire si* (E) *a des branches infinies.* [*On ne demande pas la construction complète de* (E).]

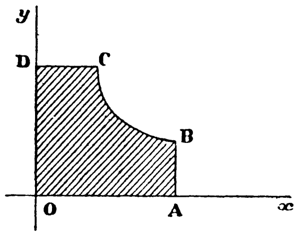
Deuxième question. — *Exposer brièvement la résolution et la discussion d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues dans le cas où le déterminant des coefficients des inconnues est nul.*

Épreuve pratique. — *On considère l'aire* OABCDO *définie comme il suit :*

$$OA = OD = 2,$$

$$AB = DC = \frac{1}{2};$$

AB *est parallèle à* Oy, DC *à* Ox; BC *est un arc d'hyper-*



bole équilatère dont les asymptotes sont Ox *et* Oy. *Déterminer :*

1° *L'aire* OABCDO;

2° *La position du centre de gravité de cette aire supposée homogène;*

3° *Le volume du solide engendré par l'aire* OABCDO *en tournant autour de* Oy;

4° *La position du centre de gravité de ce volume supposé homogène.*

On calculera ces divers éléments à 0,01 *près. Pour faciliter le calcul on a :*

$$\text{logarithme népérien de } 2 = 0{,}6931.$$

(Novembre 1912.)