Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1914)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 547-550

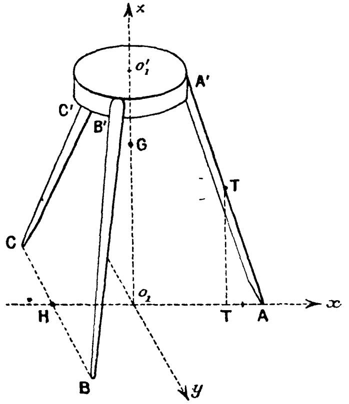
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__547_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1914).

Composition sur la Mécanique.

Un tabouret est porté par trois pieds identiques AA′, BB′, CC′, *également inclinés sur la verticale et terminés par des surfaces très petites qu'on assimilera à trois points* A, B, C. *Le tabouret est homogène et symétrique par rapport aux trois plans qui passent chacun par l'axe* $O_1O'_1$ *du tabouret et par l'un des trois points* A, B, C. *A l'instant initial, ce tabouret est en équilibre, ses trois pieds reposant en* A, B, C, *sur le sol horizontal* *supposé assez uni pour qu'on puisse négliger le frottement.*

Problème. — 1° *En un point* T *du montant* AA′ *situé dans le plan vertical de symétrie* $O_1 O_1' A$ *on*



exerce une force F. *A quelles conditions devra satisfaire* F *pour que l'équilibre primitif subsiste.*

2° *Au lieu de la force* F, *on applique une percussion* $\mathfrak{P}$ *au même point* T. *Déterminer la distribution des vitesses dans le tabouret à l'instant qui suit immédiatement la percussion. On portera son attention sur la discussion des résultats suivant la direction, la grandeur de la percussion* $\mathfrak{P}$ *et la position de son point d'application* T. *On pourra se borner aux trois cas suivants :*

I. *Le point* T *est dans le plan horizontal du centre de gravité* G *du tabouret ;*

II. *La percussion* $\mathfrak{P}$ *est parallèle à* BC ;

III. *La percussion* $\mathfrak{P}$ *est dans le plan de symétrie vertical* $O_1 O_1' A$.

3° *On appliquera les résultats précédents aux cas où la ligne d'action de* $\mathfrak{P}$:

I. *Passe par le point* O_1, *la percussion étant ascendante ;*

II. *Passe par le symétrique de* O_1, *par rapport à* A, *la percussion étant descendante, le point* T *étant à distance égale du sol et du plan horizontal du centre de gravité* G *et sa projection* T_1 *sur* AO_1 *divisant* AO_1 *dans le rapport*

$$\frac{T_1 A}{O_1 T_1} = \frac{1}{3};$$

III. *Est parallèle à* AO_1 *et de même sens, le point* T *étant au-dessous du plan horizontal du centre de gravité* G.

4° *Dans ce dernier cas* (3°, III) *on étudiera le mouvement du tabouret après la percussion, on calculera la réaction et l'on discutera les résultats obtenus suivant les valeurs de la percussion.*

Notations. — *Le triangle* ABC *est équilatéral.*

On appellera H *le milieu de* BC, O_1 *le centre du triangle,* G *le centre de gravité du tabouret situé sur l'axe* $O_1 O'_1$.

On posera

$$BC = 2a, \qquad O_1 A = 2b(a = b\sqrt{3}), \qquad h = O_1 G,$$

$$\rho = AG(\rho = \sqrt{h^2 + 4b^2}), \qquad \Psi = \widehat{O_1 AG}(h = 2b \operatorname{tang} \Psi).$$

On appellera M *la masse du tabouret,* I, J, K *ses moments d'inertie par rapport à trois axes passant par* G *et parrallèles respectivement à* $O_1 A$, BC *et* $O_1 O'_1$.

On prendra pour axes fixes trois axes rectangu-

laires coïncidant à l'instant initial avec O_1A, *la parallèle à* CB *menée par* O_1 *et* $O_1O'_1$, *les sens positifs comme les indiquent les flèches sur la figure.*

On définira la distribution des vitesses dans le tabouret par les projections ξ, η, ζ; p, q, r, *de la vitesse de* G *et de la vitesse angulaire instantanée de rotation sur des axes mobiles liés au corps et coïncidant avec* O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 *à l'instant initial.*

On appellera (α, β, γ) *les coordonnées initiales du point* T.