

## Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 14 (1914), p. 526-528

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1914\\_4\\_14\\_\\_526\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__526_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.**


---

**1795.**

( 1898, p. 196 )

*Parmi les triangles qui ont pour côtés trois entiers consécutifs, il n'en est qu'un seul dans lequel le rapport de deux angles soit un entier: c'est le triangle qui a pour côtés 4, 5, 6; dans ce triangle, un angle est double de l'autre.*

M. WEILL.

SOLUTION.

Par M. H. BROGARD.

Soient les côtés  $n + 1$ ,  $n$ ,  $n - 1$  opposés aux angles A, B, C. On aura

$$\frac{\sin A}{n + 1} = \frac{\sin B}{n} = \frac{\sin C}{n - 1}$$

et

$$2 \cos A = \frac{n - 4}{n - 1},$$

$$2 \cos B = \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1},$$

$$2 \cos C = \frac{n + 4}{n + 1};$$

et alors il faut que l'un des rapports de deux sinus soit égal à l'un des nombres  $2 \cos A$ ,  $2 \cos B$ ,  $2 \cos C$ ; l'angle correspondant étant celui du dénominateur.

En d'autres termes, l'équation en  $n$  ainsi obtenue doit admettre une racine entière.

C'est ce qui a lieu seulement pour l'ensemble des deux égalités

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{n + 1}{n - 1},$$

$$2 \cos C = \frac{n + 4}{n + 1},$$

( 527 )

car l'équation

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{n+4}{n+1}$$

se réduit à  $n = 5$ .

On a donc la relation

$$A = 2C.$$

### 2215.

( 1914, p. 96 )

*Les tangentes communes intérieures à trois cercles d'un même plan, pris deux à deux, sont tangentes à une conique homofocale à une conique inscrite au triangle qui a pour sommets les centres des trois cercles.*

THIE.

SOLUTION.

Par M<sup>lle</sup> Anne DE PRÉHYR.

Soient  $S_1, S_2, S_3$  les centres de similitude interne des circonférences  $O_1, O_2, O_3$  prises deux à deux.

Les droites  $O_1 S_1, O_2 S_2, O_3 S_3$  étant concourantes, il existe une conique  $\gamma$  inscrite à  $O_1 O_2 O_3$  et circonscrite à  $S_1 S_2 S_3$ .

Soit  $a$  une des tangentes communes intérieures à  $O_2$  et  $O_3$ ;  $a$  passe par  $S_1$  et il existe une conique  $\gamma'$  homofocale à  $\gamma$  et tangente à  $a$ .

On sait que les tangentes à  $\gamma'$  par  $S_1$  et  $S_2$  définissent un quadrilatère circonscriptible à un cercle de centre  $O_3$  (Chasles); mais  $a$  est une de ces tangentes, et ce cercle est le centre donné en  $O_3$ .

Les tangentes déjà menées par  $S_2$  permettent de remplacer  $S_1$  par  $S_2$  sans que  $\gamma'$  change; on pourra ensuite remplacer  $S_2$  par  $S_3$ , et ainsi  $\gamma'$  répond à la question.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

### 2216.

( 1914, p. 96 )

*On sait que l'on appelle anneau le volume engendré par le segment compris entre un arc de courbe AB et sa corde, tournant autour d'un axe X situé dans son plan et ne le rencontrant pas; la distance des projections orthogonales*

des points A et B sur l'axe X est la hauteur de cet anneau. Démontrer que, si l'arc AB appartient à une conique admettant X comme axe de symétrie, le centre de gravité de l'anneau est le milieu de sa hauteur.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION.

Par M<sup>lle</sup> ANNE DE PREHYR.

Le calcul suivant prouve que le théorème de M. d'Ocagne reste vrai quand on remplace la droite AB par un arc de conique dont l'axe X est aussi un axe de symétrie.

La question revient à démontrer qu'avec

$$Y^2 = ax^2 + bx + c,$$

$$y^2 = \alpha x^2 + \beta x + c$$

et

$$Y_1 = y_1 \quad (\text{pour } x = x_1),$$

on a

$$2 \int_0^{x_1} x(Y^2 - y^2) dx = x_1 \int_0^{x_1} (Y^2 - y^2) dx$$

ou encore

$$(1) \quad \int_0^{x_1} (2x - x_1)(Y^2 - y^2) dx = 0.$$

On a successivement

$$\int_0^{x_1} (2x - x_1)(a - \alpha)x^2 dx = \frac{1}{6}(a - \alpha)x_1^3,$$

$$\int_0^{x_1} (2x - x_1)(b - \beta)x dx = \frac{1}{6}(b - \beta)x_1^3.$$

Le premier membre de la formule (1) est donc égal à

$$\frac{1}{6}(a - \alpha)x_1^3 + \frac{1}{6}(b - \beta)x_1^3 = \frac{1}{6}(Y_1 - y_1)x_1^2 = 0.$$

C. Q. F. T.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

