Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 508-521

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__508_1>

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Une surface étant rapportée à ses lignes de courbure* $u =$ const., $v =$ const., *établir les relations qui existent entre les courbures principales et les coefficients du* ds^2.

2° *Démontrer que les trois coordonnées rectangulaires d'un point quelconque, de même que les trois cosinus directeurs de la normale, satisfont à une même équation de la forme*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + A\frac{\partial \theta}{\partial u} + B\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

et que, réciproquement, si une équation de cette forme admet trois solutions satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial u}\frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta_2}{\partial u}\frac{\partial \theta_2}{\partial v} + \frac{\partial \theta_3}{\partial u}\frac{\partial \theta_3}{\partial v} = 0,$$

on a les équations d'une surface rapportée à ses lignes de courbure en égalant ces trois solutions, soit aux coordonnées d'un point quelconque, soit aux cosinus directeurs de la normale.

3° *Conditions pour que la surface soit divisée en carrés par ses lignes de courbure.*

4° *Déterminer toutes les surfaces isothermiques telles que la courbure moyenne soit fonction d'une seule des deux variables u, v.* (Juillet 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère un élément de la forme*

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(Au + Bv + C)^2}, \tag{1}$$

A, B, C *étant trois fonctions d'un paramètre t qui est lui-même relié aux coordonnées u, v par la relation*

$$A'u + B'v + C' = 0. \tag{2}$$

Démontrer les propositions suivantes :

1° *Les courbures géodésiques des lignes coordonnées sont fonctions l'une de l'autre, c'est-à-dire qu'elles satisfont à une équation de la forme*

$$F\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right) = 0;$$

2° *Réciproquement tout réseau orthogonal et isotherme dont les courbures géodésiques sont fonctions l'une de l'autre permet de mettre le ds^2 sous la forme précédente.*

3° *Les lignes $t =$ const. sont des cercles géodésiques, dont chacun coupe les lignes coordonnées sous un angle constant.*

4° *Pour qu'une surface admette deux familles de lignes isométriques dont les courbures géodésiques soient dans un rapport constant, il faut et il suffit qu'elle soit applicable à une surface de révolution; il y a alors une infinité de systèmes de lignes répondant à la question; toutes ces lignes sont des loxodromies et l'inclinaison sur les méridiens reste la même pour toutes les loxodromies d'une même famille.* (Novembre 1912.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la quartique qui est représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$(x^2 - 4a^2)^2 + 16y^2(y^2 - 2ay + 2a^2) = 0.$$

1° *Construire cette courbe.*

2° *Déterminer sa classe, son genre, le nombre de ses points d'inflexion, le nombre de ses tangentes doubles.*

3° *Exprimer les coordonnées x et y d'un point quelconque de la courbe en fonction rationnelle d'un paramètre t et de la racine carrée d'un polynome du quatrième degré en t; expliquer la manière dont le point décrit la courbe quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$.*

4° *Déterminer la relation qui existe entre les paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 de quatre points de la quartique pour que ces quatre points soient en ligne droite avec l'origine.*

5° *Former l'équation qui a pour racines les paramètres des points de contact des tangentes menées de l'origine à la courbe, puis, cette équation étant supposée résolue, calculer les paramètres des deux autres points d'intersection de chacune de ces tangentes avec la quartique.*

(Octobre 1910.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soient* S_1 *et* S_2 *deux surfaces minima, chacune d'elles étant rapportée au réseau de ses courbes minima. On désigne par* M_1 *et* M_2 *les points de contact de deux plans tangents parallèles menés à ces surfaces et par* (Γ) *la congruence des droites* M_1M_2.

1° *Quels sont les réseaux conjugués découpés sur* S_1 *et* S_2 *par les développables de la congruence* (Γ)?

2° *Déterminer l'une des nappes focales* (F) *de la congruence* (Γ) *et montrer qu'en désignant par* M *le point focal correspondant, le rapport* $\dfrac{MM_1}{M_1M_2}$ $\left(\text{ou } \dfrac{MM_1}{MM_2}\right)$ *reste constant quand* M_1M_2 *décrit une développable de la congruence circonscrite à la nappe* (F).

3° *La nappe focale* (F) *étant rapportée au réseau conjugué découpé par les développables de la congruence* (Γ), *les coordonnées rectangulaires de l'un quelconque de ses points sont trois solutions d'une équation aux dérivées partielles de Laplace. Former et intégrer cette équation. De quelles intégrations dépendra la recherche des surfaces découpées par les développables de la congruence* (Γ) *suivant un réseau conjugué?*

II. *On donne la surface définie par les équations*

$$x = a\frac{\cos\frac{u+v}{2}}{\sin\frac{u-v}{2}}, \qquad y = a\frac{\sin\frac{u+v}{2}}{\sin\frac{u-v}{2}}, \qquad z = c\frac{\cos\frac{u+v}{2}}{\sin\frac{u-v}{2}},$$

x, y, z *désignant les coordonnées rectilignes d'un de ses points*, u *et* v *ses coordonnées curvilignes. Quelle est cette surface et que sont les lignes coordonnées*

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}?$$

On considère le trièdre trirectangle habituel (T) *d'arêtes* Mx_1, My_1, Mz_1, *dont le sommet est un point* M *de la surface*, Mz_1 *étant normale à la surface*, Mx_1 *et* My_1 *suivant les bissectrices de l'angle des lignes* $u =$ const., $v =$ const. *qui passent au point* M.

Calculer les quatre translations ξ, η, ξ_1, η_1, *et les six rotations* p, q, r, p_1, q_1, r_1. *Former la condition pour que deux directions soient conjuguées et l'équation différentielle des lignes de courbure. Calculer les rayons de courbure principaux et trouver le lieu des points de la surface où la courbure totale a une valeur donnée* $-\frac{1}{k^2}\cdot$ *Rapporter enfin la surface à ses lignes de courbure.*

(Juin 1913.)

Épreuve écrite. — I. Problème. — *On considère deux surfaces minima* S_1 *et* S_2, *chacune d'elles étant rapportée au réseau des courbes minima.*

On fait correspondre à tout point M_1 *de* S_1 *le point* M_2 *de* S_2 *qui a mêmes coordonnées curvilignes, soient* u, v.

On désigne par M *le point de* M_1M_2 *tel que le rap-*

port $\dfrac{MM_1}{M_1M_2}$ *soit une fonction donnée* $\psi(u)$ *de* u *seulement, et par* S *la surface engendrée par* **M**.

1° *Démontrer que pour* $u =$ const. *ou* $v =$ const. *la droite* M_1M_2 *engendre une surface développable.*

2° *Ces deux familles de développables découpent sur la surface* δ *un réseau conjugué, et l'une des familles de courbes de ce réseau est minima.*

3° *Comment doit-on choisir* S_1 *et* S_2 *et la fonction* $\psi(u)$ *pour que la surface* S *soit une surface minima non développable.*

On rappelle que l'on peut représenter une surface minima par les formules :

$$x = \frac{1-u^2}{2} f''(u) + u f'(u) - f(u),$$

$$y = i\left[\frac{1+u^2}{2} f''(u) - u f'(u) + f(u)\right],$$

$$z = u f''(u) - f'(u).$$

II. Question des cours. — *Démontrer que toute surface hélicoïdale est applicable sur une surface de révolution. Cas de l'hélicoïde gauche à plan directeur.*

(Octobre 1913.)

Paris.

Épreuve écrite. — *On considère la surface dont l'élément linéaire est donné par la formule*

$$ds^2 = \left(\frac{2}{u} - \frac{1}{a}\right)(du^2 + u^2\,dv^2),$$

où a *désigne une constante positive.*

1° *On demande de déterminer explicitement les lignes géodésiques de la surface.*

2° *Si l'on fait correspondre au point de coordonnées* u, v *de la surface le point du plan qui a pour coordonnées polaires*

$$\rho = u, \qquad \omega = v,$$

quelles sont les courbes du plan qui correspondent aux géodésiques de la surface?

3° *On demande de déterminer la ou les lignes géodésiques passant par les deux points* (u, v) *et* (u_0, v_0).

4° *On demande l'enveloppe de toutes les lignes géodésiques passant par un point déterminé* $A(u_0, v_0)$ *de la surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — Solide commun à une sphère et à un conoïde.

Sphere. — *Son rayon vaut* 5^{cm}; *la ligne de rappel du centre est à* 10^{cm} *à gauche du petit axe de la feuille.*

Les projections du centre sont symétriques par rapport au grand axe et distantes de cet axe de 7^{cm}.

Conoïde. — *Son plan directeur est horizontal. Il a pour directrices la verticale du centre de la sphère et une ellipse de bout qui se projette horizontalement suivant un cercle; le centre de l'ellipse est le point le plus à gauche de la sphère; un sommet du grand axe est le point le plus bas de la sphère.*

1° *Construire la projection de l'intersection des deux surfaces, et représenter la partie de la sphère située du côté de la surface du conoïde qui contient le centre de l'ellipse, l'autre partie étant supprimée.*

2° *Déterminer la perspective de ce solide sur le plan horizontal, le point de vue étant à l'infini dans une direction de front inclinée à* 45° *sur le plan horizontal. Transporter cette perspective parallèlement à la ligne de terre à* 10^{cm} *vers la droite.*

La ligne de terre coïncide avec le grand axe de la feuille.

Nota. — *On divisera le demi-grand cercle de front de la sphère* en *huit parties égales et l'on construira les sections horizontales du solide menées par les points de division, tant sur les projections orthogonales que sur la perspective (sur cette dernière ne figureront que les parties vues de ces sections).*

Mettre en rouge les constructions qui donnent la tangente en un point quelconque, ainsi que les tangentes remarquables, sur chaque figure.

Expliquer brièvement l'épure. (Mars 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère tous les cercles tangents à deux droites parallèles* (D), (D′) :

1° *On demande de trouver les trajectoires orthogonales de ces cercles et de démontrer que toutes les trajectoires orthogonales sont des courbes égales.*

2° *On considère la surface de révolution engendrée par la rotation d'une de ces trajectoires autour de la droite* (D″) *lieu des points à égale distance de* (D) *et de* (D′).

3° *Déterminer les lignes asymptotiques et les lignes géodésiques de cette surface de révolution.*

4° *Construire toutes les géodésiques passant par deux points donnés de la surface et déterminer la plus courte de ces lignes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cercle de front* (C) *d'éloignement* 7^{cm} *et de* 5^{cm} *de rayon est tangent au plan horizontal sur le grand axe de la feuille.*

Une verticale D, *d'éloignement* 11^{cm}, *se projette à* 9^{cm} *à gauche du grand axe de la feuille. Elle sert de directrice à un conoïde dont les génératrices sont horizontales et s'appuient sur le cercle* C.

On demande de représenter la portion de volume de ce conoïde qui est intérieure à la sphère dont le cercle C *est un grand cercle ainsi que l'ombre portée par ce solide sur les plans de projection. Les rayons lumineux sont à* 45°.

Figurer au trait rouge les constructions qui donnent un point quelconque et les points remarquables des lignes d'intersection et d'ombre, ainsi que les tangentes de ces points.

Donner sur la feuille définie, sous forme de légende, une explication très sommaire des constructions effectuées.

(Octobre 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Déterminer toutes les surfaces dont les deux familles de lignes asymptotiques se projettent sur le plan des xy suivant un réseau de courbes rectangulaires ;*

2° *Déterminer pour ces surfaces les deux familles de lignes asymptotiques et montrer qu'elles se projettent suivant un réseau isotherme, qui peut être choisi arbitrairement sur le plan des xy ;*

3° *Déterminer celles de ces surfaces pour lesquelles les lignes asymptotiques se projettent aussi suivant un réseau de courbes rectangulaires sur le plan des xz.*

(*On suppose bien entendu les axes rectangulaires.*)

(Octobre 1913.)

Rennes.

Composition écrite. — I. *Toute surface* (S) *dont les sections planes par des plans pivotant autour de* Oz *constituent un premier système de lignes de courbure admet pour second système de lignes de courbure les courbes de contact des cônes circonscrits dont le sommet est sur* Oz. *Réciproque.*

Ces courbes de contact sont sphériques. La surface S *est coupée par chaque plan* P *passant par* Oz *suivant un angle constant* V (*variable d'un plan* P *à un autre*).

II. *On sait que l'équation*

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{(1+p_0^2)\,dx + p_0 q_0\,dy}{r_0\,dx + s_0\,dy} = \frac{p_0 q_0\,dx + (1+q_0^2)\,dy}{s_0\,dx + t_0\,dy}$$

fournit au point M (x_0, y_0, z_0) *les deux directions principales de la surface en ce point;* p_0, q_0, i_0, s_0, t_0, *désignent les valeurs prises en* M *par les dérivées premières et secondes de* z *considéré comme fonction de* x *et* y.

En comparant l'équation (A) *à l'équation* (B),

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{(1+p^2)x + pqy}{rx + sy} = \frac{pqx + (1+q^2)y}{sx + ty},$$

on vérifiera aisément que, toute surface satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles (B), *est une surface* (S) *du premier paragraphe.*

III. *En se servant des résultats du premier paragraphe, on prouvera que l'équation* (B), *admet comme intégrale première l'équation* (C),

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{py + qx}{\sqrt{1+p^2+q^2}\,\sqrt{(x^2+y^2)}} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

où f *est une fonction arbitraire.*

Donner, en se servant de la première partie, l'interprétation géométrique de l'équation (C).

Inversement, montrer que de l'équation (C) *on peut déduire l'équation* (B) *par élimination de la fonction* f.

IV. *Pour intégrer l'équation* (C) *où* f *est supposée donnée, prendre les coordonnées semi-polaires* ρ, θ, z, *poser*

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial \rho}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial \theta},$$

et montrer qu'en posant

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \cos V,$$

on obtient l'équation

$$(C') \quad \rho^2(1+p_1^2) - q_1^2 \operatorname{tang}^2 V = 0 \qquad (\text{V fonction de } \theta \text{ seul}).$$

En posant

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{F'(\theta)},$$

où la fonction F′ *est la dérivée d'une fonction* F (θ), *arbitraire au même titre que* f, *les caractéristiques sont données par les équations*

$$\rho^2(1+p_1^2) = \lambda^2, \qquad q_1 \operatorname{tang} V = \lambda,$$
$$p_1\rho - z = \mu, \qquad \frac{\lambda}{\rho} = \operatorname{ch}[F(\theta)+\nu),$$

λ, μ, ν, *désignant trois constantes arbitraires.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit la surface :*

$$\frac{x}{a} = \frac{uv-1}{uv+1},$$
$$\frac{y}{b} = \frac{u+v}{uv+1},$$
$$\frac{z}{c} = \frac{u-v}{uv+1}.$$

1° *Lignes asymptotiques.*

2° *Former l'équation différentielle des lignes de courbure. Calculer les rayons principaux de courbure.*

(Novembre 1912.)

COMPOSITION ÉCRITE. — *Un point m de coordonnées x, y, z décrit une courbe gauche (γ) dont on appelle s l'arc, r le rayon de courbure, t le rayon de torsion; a, b, c les cosinus directeurs de la tangente; a' b' c' les cosinus directeurs de la normale principale; a'', b'' c'' les cosinus directeurs de la binormale. On considère la courbe dite* adjointe (γ_0) *décrite par le point m_0*

$$x_0 = \int a'' \, ds, \qquad y_0 = \int b'' \, ds, \qquad z_0 = \int c'' \, ds$$

et les courbes dites associées (Γ) *définies par les équations*

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} X = x \cos\theta + x_0 \sin\theta, \\ Y = y \cos\theta + y_0 \sin\theta, \\ Z = z \cos\theta + z_0 \sin\theta, \end{cases}$$

où θ est une constante.

On désigne par les grandes lettres, $S, R, T, A, A', \ldots, C''$ *les éléments de la courbe (Γ) analogues aux éléments de la courbe (γ) représentés par la même petite lettre.*

1° *Trouver le trièdre de Serret-Frenet relatif à la courbe associée. Dispositions de ce trièdre par rapport au trièdre de la courbe donnée. Longueur des arcs correspondants sur (γ) et (Γ).*

2° *Rayon de courbure et rayon de torsion de la courbe* (Γ).

3° *Montrer que si (Γ) est une courbe associée à (γ), inversement (γ) est l'une des courbes associées à (Γ).*

4° *Pour $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, la courbe (Γ) se réduit à (γ) ou à (γ_0).*

Montrer que si (γ) a son rayon de courbure constant, (γ_0) a son rayon de torsion constant. Dans ce cas les courbes (Γ) sont dites courbes de Bertrand $\left(\textit{relation linéaire entre les deux courbures } \frac{1}{R} \textit{ et } \frac{1}{T}\right)$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient c, c', c'' les coordonnées d'un point μ qui décrit une courbe (γ) sphérique arbitraire sur la sphère de centre O et de rayon 1 en axes rectangu-*

laires. Les formules

$$x = \tau \int c''\,dc' - c'\,dc'',$$

$$y = \tau \int c\ dc'' - c''\,dc,$$

$$z = \tau \int c'\,dc - c\ dc',$$

définissent une courbe C, *telle que la tangente* MT *en* M, *à cette courbe, soit perpendiculaire au plan* O$\mu\theta$ *déterminé par le rayon* Oμ *et la tangente* $\mu\theta$ *en* μ *à la courbe sphérique.*

Inversement la droite Oμ *est perpendiculaire au plan osculateur en* M *à la courbe* C, *de sorte que* γ *est l'indicatrice des torsions de* C; *et la formule*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \tau^2(dc^2 + dc'^2 + dc''^2)$$

montre que la torsion de C *est constante et égale à* τ.

Soient donc

$$c = \frac{\sqrt{\lambda}\cos\mu t - \sqrt{\mu}\cos\lambda t}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}},$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}\sin\mu t + \sqrt{\mu}\sin\lambda t}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}},$$

$$c'' = \frac{2\sqrt[4]{\lambda\mu}\cos\dfrac{\lambda+\mu}{2}t}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}}$$

(λ, μ *constantes*, t *paramètre variable*), *les équations paramétriques d'une courbe sphérique* γ *particulière.*

Déterminer la courbe C *correspondante. Montrer que si le rapport* $\frac{\lambda}{\mu}$ *est commensurable, on peut, en effectuant au préalable la substitution* $t = k$T, *où* k *est une certaine constante, supposer* λ *et* μ *entiers et premiers entre eux et déduire de là que dans ce cas la courbe* C *est algébrique et unicursale.*

(Juin 1913.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir les relations qui lient les deux formes quadratiques fondamentales*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad da\, dx + db\, dy + dc\, dz$$

attachées à une surface quand on la suppose rapportée à ses lignes de longueur nulle.

Appliquer les formules à la détermination des surfaces pour lesquelles ces lignes forment un réseau conjugué et « qui possèdent un élément linéaire donné ».

Indiquer les cas où cet élément linéaire peut convenir à des surfaces de révolution et déterminer alors les lignes géodésiques de la surface.

II. *Étudier la transformation de contact, dite* trans formation apsidale, *pour laquelle les coordonnées cartésiennes respectives* x, y, z *et* X, Y, Z *des points correspondants, par rapport à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *sont liées par les relations*

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$
$$Xx + Yy + Zz = 0.$$

Appliquer cette transformation aux quadriques admettant l'origine O *pour centre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Établir les équations générales des cercles qui coupent à angle droit le plan des* xy *et la surface* (S) *ayant pour équation*

$$z = f(x, y).$$

Vérifier que ces cercles sont toujours normaux à une famille de surfaces Σ.

Si l'on appelle A *et* B *les deux points où l'un des cercles coupe le plan des* xy, M *le point où il rencontre* S, P *le point où il rencontre l'une des surfaces* Σ, *le rapport anharmonique des quatre points* A, M, B, P *est constant.*

La transformation qui change les coordonnées (x, y, z, p, q) *de l'élément de contact en* M *en coordonnées* (X, Y, Z, P, Q) *de l'élément de contact en* P *est une transformation de contact.*

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère une surface* S, *lieu du point* (x, y, z), *pour laquelle*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

1° *Montrer que les tangentes aux lignes* $v =$ const. *sont normales à une famille de surfaces. Déterminer l'une d'elles* Σ *et ses rayons de courbure principaux* R et R'.

2° *A quelle condition* R' *est-il fonction de* R? *Calculer dans ce cas l'élément linéaire de la seconde nappe* S_1 *de la surface focale de la congruence des normales à* Σ.

3° *Trouver toutes les formes de la relation entre* R *et* R' *qui conduisent pour* S *ou pour* S_1 *à une surface à courbure constante négative.*

4° *Déterminer les hélicoïdes sur* S *ou sur* S_1 *et « leurs lignes géodésiques ».*

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère les surfaces* (S) *représentées en coordonnées cartésiennes rectangulaires par les formules*

$$x = A(u-a)^m(v-a)^n,$$
$$y = B(u-b)^m(v-b)^{n'},$$
$$z = C(u-c)^m(v-c)^{n'},$$

et l'on demande :

1° *De montrer que les lignes* $v =$ const. *sont conjuguées;*

2° *De former l'équation différentielle de leurs lignes asymptotiques, et d'indiquer comment elle s'intègre. Y a-t-il des cas où l'intégrale est algébrique en u et v ?*

3° *En laissant a, b, c arbitraires, de déterminer* tous les cas *où les lignes* $u =$ const. *sont des lignes de courbure de* (S). *Quelle est alors la nature de ces surfaces* (S)?

4° *De trouver la seconde nappe de la surface focale de la congruence de droites formée par les tangentes aux lignes* $u =$ const. *de l'une des surfaces* (S).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver la masse de la partie de* *l'espace comprise entre deux sphères concentriques de rayons respectifs r et* R *sachant que la densité en un point* M *est inversement proportionnelle à sa distance* MP *à un point fixe* P.

Examiner les divers cas possibles suivant la position du point P.

(Novembre 1912.)