NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DMITRY KRYJANOWSKY

# Sur une généralisation de la définition de limite et du criterium de Bolzano-Cauchy

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 14 (1914), p. 49-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__49_0>

[D1a]

# SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA DÉFINITION DE LIMITE ET DU CRITERIUM DE BOLZANO-CAUCHY (1);

PAR M. DMITRY KRYJANOWSKY.

Les limites employées dans l'Analyse infinitésimale peuvent être réparties en deux catégories : d'une part, nous avons les limites des fonctions d'un nombre fini de variables; d'autre part, les limites des expressions telles que

$$\Sigma f(\xi_i)\,\Delta_i, \quad \Sigma f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\omega_i, \quad \ldots,$$

qui servent à la définition des intégrales définies simples, doubles, etc. Les définitions de ces deux espèces de limites, si rapprochées qu'elles soient, ne sont pas identiques. Cela présente cet inconvénient que les théorèmes démontrés pour la première catégorie de limites ne sont pas *eo ipso* démontrés pour la seconde catégorie. Comme exemple très important, on peut citer la règle fondamentale de convergence, autrement nommée *le critère d'existence de Bolzano-Cauchy* (ou bien encore *principe général de convergence*) qui s'énonce de la façon suivante pour les fonctions d'*une* variable :

Soit $f(x)$ une fonction quelconque définie pour tous les nombres $x$ d'un ensemble E qui possède un point d'accumulation $a$. Pour que cette fonction tende vers

(1) Le contenu de cet article a été l'objet d'une communication faite par l'auteur dans la séance de la Société mathématique de Göttingue, le 20 juin 1911.

une limite déterminée quand la variable $x$, prenant des valeurs de E, tend elle-même vers $a$, *il faut et il suffit* qu'à tout nombre positif $\varepsilon$, corresponde un nombre $\delta$ positif tel qu'on ait

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

toutes les fois que les nombres $x'$, $x''$, empruntés à l'ensemble E, satisfont aux conditions suivantes :

$$0 < |x' - a| < \delta, \qquad 0 < |x'' - a| < \delta.$$

Un criterium analogue peut être établi pour la deuxième catégorie des limites, mais cela exige une démonstration spéciale.

Pour éviter cette incommodité (de démontrer deux fois la même chose), j'ai cherché à généraliser la définition de limite de telle façon qu'elle embrasse les définitions employées en Analyse comme cas particuliers. Cela aurait cette importance que chaque proposition démontrée pour la notion de limite généralisée serait par là même établie pour tous les cas particuliers. Pour donner un exemple, je démontre dans ce qui suit, la validité de la règle de Cauchy-Bolzano pour les limites généralisées. Puis, je cite un exemple où cette règle s'applique aux limites de la deuxième catégorie.

1. Définition de limite généralisée. — Soit $E_0$ un ensemble quelconque de nombres (réels ou complexes). Supposons que nous pouvons, à tout nombre positif $\delta$, faire correspondre d'une façon univoque un ensemble tel $E(\delta)$ faisant partie de $E_0$, que l'ensemble $E(\delta_1)$ contienne tous les éléments de l'ensemble $E(\delta_2)$ chaque fois que $\delta_1 \geqq \delta_2$. Donc à un nombre plus petit correspond un ensemble qui fait partie de l'ensemble correspondant à un nombre plus grand. A l'ensemble

$E(\delta_1)$ nous donnons le nom de « ensemble conjugué avec la valeur paramétrique $\delta_1$ ». Quant aux éléments de $E(\delta_1)$, nous les appelons « éléments conjugués avec la valeur paramétrique $\delta_1$ » et les désignons par les symboles $e(\delta_1)$ ou encore par $e_i(\delta_1)$.

En adoptant ces notations, nous pouvons énoncer la définition suivante :

*Définition de limite.* — « Un nombre A est limite des éléments $e(\delta)$ quand le paramètre $\delta$ tend vers zéro, symboliquement

$$A = \lim_{\delta=0} e(\delta),$$

si à tout nombre positif $\varepsilon$ correspond une valeur paramétrique $\delta_0$ telle qu'on ait

$$|e(\delta_0) - A| < \varepsilon$$

pour chaque élément $e(\delta_0)$ conjugué avec cette valeur $\delta_0$. »

2. Exemples. — Quand il est donné un ensemble de nombres $E_0$, la séparation paramétrique des ensembles partiels $E(\delta)$ telle qu'elle est décrite au paragraphe 1, est un problème indéterminé. C'est le but spécial que l'on poursuit qui détermine le choix entre les solutions possibles.

Dans ce qui suit, on verra comment il faut faire ce choix pour obtenir les définitions ordinaires de limite comme cas particuliers de la définition générale du paragraphe 1.

1° *Limite d'une suite.* — Soit $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ une suite indéfinie de nombres. Désignant par $E_0$ l'ensemble de tous les éléments de cette suite, faisons correspondre à toute valeur paramétrique $\delta(> 0)$

l'ensemble partiel $E(\delta)$ formé par tous les éléments $u_n$ de cette suite qui ont l'indice $n > \frac{1}{\delta}$.

Soit $\delta_1 > \delta_2$ ou $\frac{1}{\delta_1} < \frac{1}{\delta_2}$. Un indice $n$ qui est $> \frac{1}{\delta_2}$ sera par force $> \frac{1}{\delta_1}$; donc tout élément $u_n$ de l'ensemble $E(\delta_2)$ appartiendra nécessairement à l'ensemble $E(\delta_1)$.

Ainsi, la correspondance paramétrique cherchée est établie et nous pouvons appliquer la définition de limite généralisée.

En remarquant que $e(\delta)$ désigne un terme quelconque $u_n$ de la suite avec un indice $n > \frac{1}{\delta}$, nous dirons :

$\lim\limits_{\delta=0} e(\delta)$ existe et est égale à A si à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta_0 > 0$ tel qu'on ait $|u_n - A| < \varepsilon$ pour tout indice $n > \frac{1}{\delta_0}$.

Or, c'est la définition usuelle de $\lim\limits_{n=\infty} u_n$.

2° *Limite de fonction d'une variable.* — Soit $f(x)$ une fonction définie pour toute valeur d'un ensemble D ayant $a$ pour point d'accumulation.

Soit $E_0$ l'ensemble de toutes ces valeurs de $f(x)$ et $E(\delta)$ l'ensemble de celles d'entre elles qui correspondent aux valeurs $x$ de D satisfaisant à l'inégalité

$$0 < |x - a| < \delta.$$

On voit que $E(\delta_1)$ contient $E(\delta_2)$, dès que $\delta_1 > \delta_2$.

Selon notre définition, l'égalité

$$A = \lim_{\delta=0} e(\delta)$$

signifie qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta_0 > 0$ tel qu'on ait

$$|e(\delta_0) - A| < \varepsilon,$$

ou bien qu'on ait

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

toutes les fois que

$$0 < |x - a| < \delta_0.$$

Or, c'est la définition donnée en analyse à l'égalité :

$$A = \lim_{x=a} f(x).$$

3° *Limite d'une fonction de plusieurs variables.* — Soit $f(x, y, z)$ une fonction définie pour tout système de valeurs de $x$, $y$, $z$ prises, respectivement, dans les ensembles $D_1$, $D_2$, $D_3$ tels que $D_1$ a le point d'accumulation $a$, $D_2$ a le point d'accumulation $b$ et $D_3$ contient des nombres plus grands que tout nombre positif donné N. Désignons par $E_0$ l'ensemble de toutes ces valeurs de $f(x, y, z)$ et par $E(\delta)$ l'ensemble de celles d'entre elles qui correspondent aux nombres $x$, $y$, $z$ satisfaisant aux inégalités

$$|x - a| < \delta. \qquad |y - b| < \delta, \qquad z > \frac{1}{\delta}.$$

Si $\delta' > \delta$ on aura *a fortiori*

$$|x - a| < \delta', \qquad |y - b| < \delta', \qquad z > \frac{1}{\delta'};$$

donc $E(\delta')$ contient tous les éléments de $E(\delta)$ si $\delta'$ est plus grand que $\delta$.

Notre définition fait correspondre la notation

$$\lim_{\delta=0} e(\delta) = A$$

avec ce fait qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel qu'on ait

$$|e(\delta) - A| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire qu'on ait

$$|f(x, y, z) - A| < \varepsilon$$

chaque fois que

$$|x-a|<\delta, \qquad |y-b|<\delta, \qquad z>\frac{1}{\delta}.$$

Mais dans ces mêmes conditions, on dit que

$$\lim_{\substack{x=a\\ y=b\\ z=+\infty}} f(x, y, z) = A.$$

4° *Limite de la somme* $\Sigma f(\xi_i)\Delta_i$. — Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $ab$ $(a<b)$. Divisons cet intervalle en $n$ parties par des nombres croissants $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ lui appartenant, et formons la somme $\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)\Delta_i$, désignant par $\Delta_i$ la longueur de l'intervalle partiel $x_{i-1}x_i$ $(x_0 \equiv a, x_n \equiv b)$ et par $\xi_i$ un nombre quelconque lui appartenant.

On dit que cette somme tend vers une limite déterminée J quand tous les intervalles $\Delta_i$ tendent vers zéro :

$$\lim_{\Delta_i=0} \Sigma f(\xi_i)\Delta_i = J,$$

si à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\delta>0$ tel que, pour choix arbitraire du nombre $n-1$ des points de division, de ces points $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ mêmes et des points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ dans les intervalles correspondants, on ait toujours

$$|J - \Sigma f(\xi_i)\Delta_i| < \varepsilon,$$

à la seule condition que tous les intervalles $\Delta_i$ soient moindres que $\delta$.

C'est la définition *riemanienne* de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ dans sa forme rigoureuse [1].

---

[1] Tandis que tous les Traités modernes d'Analyse donnent la

Voyons maintenant comment il faut établir la correspondance paramétrique des parties de l'ensemble des sommes $\Sigma f(\xi_i)\Delta_i$ pour que la définition généralisée de limite nous conduise à la définition précédente.

Soit $E_0$ l'ensemble de toutes les sommes $\Sigma f(\xi_i)\Delta_i$ qui correspondent à un choix tout à fait arbitraire des intervalles $\Delta_i$ constituant l'intervalle $ab$ et des nombres $\xi_i$ appartenant à ces intervalles. A une valeur paramétrique $\delta\,(>0)$, conjuguons l'ensemble $E(\delta)$ de celles de ces sommes chez lesquelles tous les intervalles $\Delta_i$ sont moindres que $\delta$.

Si $\delta_1 > \delta_2$, chaque somme $e(\delta_2)$ a tous les $\Delta_i$ plus petits que $\delta_2$; donc $\Delta_i < \delta_1$, si bien que cette somme fera partie de $E(\delta_1)$ aussi.

Par définition (§ 1) pour qu'il existe $\lim\limits_{\delta=0} e(\delta) = A$, c'est-à-dire $\lim\limits_{\Delta_i=0} \Sigma f(\xi_i)\Delta_i = A$, il faut et il suffit qu'à tout $\varepsilon > 0$ corresponde un $\delta_0 > 0$ tel qu'on ait

$$|e(\delta_0) - A| < \varepsilon,$$

ou bien qu'on ait

$$|\Sigma f(\xi_i)\Delta_i - A| < \varepsilon$$

aussitôt que tous les $\Delta_i$ sont $< \delta_0$.

Mais c'est la définition usuelle mentionnée plus haut de

$$\lim_{\Delta_i=0} \Sigma f(\xi_i)\Delta_i.$$

Nous voyons donc que les définitions usuelles (1) des

---

définition rigoureuse de $\lim\limits_{x=a} f(x)$ (définition $\varepsilon$, $\delta$), j'ai trouvé la définition précédente de $\lim \Sigma f(\xi_i)\Delta_i$ seulement chez O. STOLZ (*Grundzüge, etc.*); les autres auteurs se contentent toujours encore de la définition verbale vieillie.

(1) Nous pourrions augmenter le nombre des exemples, mais cela serait inutile.

différentes espèces de limites sont en effet contenues dans la définition du paragraphe 1. Il ne faut qu'établir chaque fois une correspondance paramétrique convenable entre les quantités dont on définit la limite et les valeurs du paramètre positif $\delta$.

3. Critère d'existence Cauchy-Bolzano. — « Pour qu'il existe $\lim\limits_{\delta=0} e(\delta)$, *il faut et il suffit* qu'à tout nombre positif $\varepsilon$ corresponde une valeur paramétrique $\delta_0 > 0$ telle que pour deux éléments quelconques $e_1(\delta_0)$, $e_2(\delta_0)$ de l'ensemble $E(\delta_0)$, on ait toujours

$$|e_1(\delta_0) - e_2(\delta_0)| < \varepsilon. \text{ »}$$

*Démonstration.* — Ce critère se démontre de la même manière que le critère de Cauchy ordinaire comme on s'assurera tout de suite.

1° *La condition est nécessaire.* — Si la limite en question existe et est égale à A, on peut, étant donné le nombre $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, trouver une valeur paramétrique $\delta_0$ telle qu'on ait

$$|A - e_1(\delta_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |A - e_2(\delta_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

où $e_1(\delta_0)$ et $e_2(\delta_0)$ sont deux éléments quelconques de l'ensemble $E(\delta_0)$ conjugué avec la valeur trouvée $\delta_0$. Ces deux inégalités donnent

$$|e_1(\delta_0) - e_2(\delta_0)| < \varepsilon.$$

2° *La condition est suffisante.* — Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots)$ une suite indéfinie quelconque de nombres *décroissants*, convergente vers zéro :

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

A ces nombres, on peut faire correspondre, par supposition, des nombres positifs $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, ..., tels qu'on ait

$$(A) \qquad |e_1(\delta_k) - e_2(\delta_k)| < \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$e_1(\delta_k)$ et $e_2(\delta_k)$ étant deux éléments quelconques de l'ensemble $E(\delta_k)$.

Si les nombres $\delta_k$ ne vérifient pas les inégalités

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots,$$

nous pouvons les remplacer par les nombres $\delta'_k \leqq \delta_k$ tels qu'on aura

$$\delta'_1 > \delta'_2 > \delta'_3 > \ldots,$$

parce que l'ensemble $E(\delta'_k)$ est contenu dans l'ensemble $E(\delta_k)$. Dans la suite, j'écrirai $\delta_1$, $\delta_2$, ..., sans accents, en supposant qu'on ait

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots.$$

Soit $\alpha_1$ un des éléments de l'ensemble $E(\delta_1)$. La première des inégalités (A) montre que prenant pour $e_1(\delta_1)$ cet élément $\alpha_1$, on aura

$$|\alpha_1 - e_2(\delta_1)| < \varepsilon_1;$$

donc tous les éléments de $E(\delta_1)$ se trouvent à l'intérieur du cercle $K_1$ décrit autour du point $\alpha_1$ comme centre avec le rayon $\varepsilon_1$.

Soit $\alpha_2$ un des éléments de $E(\delta_2)$ distinct de $\alpha_1$. En vertu de (A) (pour $k = 2$), nous pouvons écrire

$$|\alpha_2 - e_2(\delta_2)| < \varepsilon_2.$$

En continuant ainsi, nous pouvons construire une suite indéfinie de points distincts entre eux $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... qui se trouvent tous à l'intérieur du cercle $K_1$ [$\alpha_n$ étant un des éléments $e(\delta_n)$ et l'ensemble $E(\delta_n)$ étant contenu dans $E(\delta_1)$] et satisfont aux inégalités

$$(B) \qquad |\alpha_k - e(\delta_k)| < \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$e(\delta_k)$ étant un élément quelconque de l'ensemble $E(\delta_k)$.

Il existe au moins *un point d'accumulation* A de ces points $\alpha_k$.

Il nous reste à montrer que ce nombre A est la limite cherchée $\lim\limits_{\delta=0} e(\delta)$.

Soit donc un nombre positif $\varepsilon$ aussi petit qu'on veut. On peut toujours trouver un index N assez grand pour qu'on ait simultanément :

$$(C) \qquad |A - \alpha_N| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varepsilon_N < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'inégalité (B) pour $k = N$ nous donne

$$|\alpha_N - e(\delta_N)| < \varepsilon_N,$$

ce qui entraîne, en vertu des inégalités (C), l'inégalité

$$|A - e(\delta_N)| < \varepsilon.$$

Donc nous avons trouvé une valeur paramétrique $\delta_N$ telle qu'on ait

$$|A - e(\delta_N)| < \varepsilon,$$

où $\varepsilon$ est un nombre positif quelconque donné d'avance. Ainsi, l'existence de $\lim\limits_{\upsilon=0} e(\delta)$ égale à A, est démontrée.

On démontre bien aisément que le point d'accumulation A est unique.

4. Conditions d'existence de l'intégrale définie. — En appliquant la règle de Cauchy-Bolzano généralisée à l'ensemble des expressions de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)\,\Delta_i$$

(*voir* § 2, n° 4), nous pouvons énoncer la condition suivante de l'existence de $\int_a^b f(x)\,dx$ :

« Pour qu'il existe

$$\lim_{\Delta_i=0} \Sigma f(\xi_i)\,\Delta_i \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,dx,$$

*il faut et il suffit* qu'à tout nombre positif $\varepsilon$ on puisse faire correspondre un nombre $\delta_0 > 0$ tel qu'on ait

$$|e_1(\delta_0) - e_2(\delta_0)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire qu'on ait

$$|\Sigma_1 - \Sigma_2| < \varepsilon,$$

$\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ étant deux éléments quelconques de notre ensemble des sommes $\Sigma f(\xi_i)\Delta_i$, à la seule condition que tous les intervalles partiels $\Delta_i$ soient moindre que $\delta_0$. »

Cette proposition permet d'établir dans certains cas l'existence de l'intégrale définie, ce qui offre, outre l'intérêt théorique, l'avantage méthodique de l'uniformité des procédés de démonstration, surtout si l'on compare avec les méthodes de démonstration usuelles. Par exemple, pour démontrer l'existence de l'intégrale définie d'une fonction *continue* et, pour établir les conditions d'intégrabilité dites de Riemann, on introduit les notions des *sommes supérieures* et *inférieures* :

$$\overline{S} = \Sigma M_i \Delta_i, \qquad \underline{S} = \Sigma m_i \Delta_i,$$

$M_i$ étant la limite supérieure, et $m_i$ la limite inférieure de $f(x)$ dans $\Delta_i$.

Puis on démontre le théorème de Darboux sur l'existence des limites de ces sommes, nommées l'*intégrale supérieure* et l'*intégrale inférieure*, pour toute fonction *bornée*.

Pourtant, toutes ces notions auxiliaires sont superflues si l'on utilise le critère de Cauchy, énoncé plus haut.

En effet, pour une fonction *continue* $f(x)$, il suffit de démontrer de la manière bien connue (en comparant deux systèmes d'intervalles à un troisième système combiné d'eux) qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel qu'on ait $|\Sigma_1 - \Sigma_2| < \varepsilon$ toutes les fois que dans les sommes $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ tous les intervalles partiels $\Delta_i$ sont plus petits que $\delta$. Alors, l'existence de $\int_a^b f(x)dx$ est une conséquence immédiate en vertu du criterium de Cauchy.

D'une manière aussi immédiate, on peut obtenir la condition d'intégrabilité de Riemann.

5. Condition d'existence des intégrales définies généralisées. — Pour donner encore un exemple de l'application de la règle Bolzano-Cauchy, j'indiquerai la démonstration exacte d'une condition d'existence relative aux intégrales définies *généralisées* (impropres, *uneigentlich*). On trouve cette condition dans le *Cours d'Analyse* de C. Jordan (t. II, 2e édition, p. 50-51).

Rappelons la définition donnée par M. Jordan :

Soit $f(x)$ une fonction intégrable (au sens ordinaire du mot) dans tout l'intervalle $ab$, sauf aux environs des points $c_1$, $c_2$, $c_3$, ..., en nombre infini. L'ensemble M de ces points singuliers est *fermé* (ou *parfait* selon la terminologie de M. Jordan).

En effet, si un de ses points d'accumulation $x$ était point ordinaire de l'intervalle $ab$, la fonction $f(x)$ serait intégrable dans l'intervalle $x - h \ldots x + h$, si $h$ est suffisamment petit. Mais, dans ce dernier intervalle, se trouveraient des points singuliers; donc, aux environs de ces points, $f(x)$ serait intégrable, contradictoirement à la supposition.

En décomposant le champ $ab$ en intervalles partiels de longueur moindre qu'une quantité donnée d'avance $\delta$, considérons ceux de ces intervalles qui ne contiennent, ni à leur intérieur, ni à leurs extrémités, aucun des points singuliers.

Ils formeront par réunion un domaine jouissant des propriétés suivantes :

1° Il contient tous les points de l'intervalle $ab$ dont l'écart à l'ensemble fermé M est égal ou supérieur à $\delta$;

2° Il est formé d'un nombre fini de portions $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ..., d'un seul tenant, séparées les unes des autres par des points singuliers.

Il est donc établi l'existence des domaines satisfaisant à ces deux conditions, où $\delta$ est un nombre positif arbitraire donné d'avance.

Soit D un domaine *quelconque* satisfaisant à ces conditions pour une valeur déterminée de $\delta$. Nous l'appelons *domaine* D *correspondant à* $\delta$.

Comme les intervalles $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ..., ne contiennent pas de points singuliers, nous pouvons déterminer les intégrales

$$\int_{a_1}^{b_1} f\,dx, \quad \int_{a_2}^{b_2} f\,dx, \quad \ldots .$$

Nous représenterons leur somme $\Sigma \int_{a_i}^{b_i} f\,dx$ par le signe $\int_{\mathrm{D}} f\,dx$ et l'appelons l'*intégrale de* $f(x)$ *prise dans le domaine* D.

Faisons $\delta$ décroître indéfiniment et, pour toute sa valeur, prenons un domaine D quelconque correspondant à lui. Ce domaine variable englobera progressivement tous les points de l'intervalle $ab$ qui ne sont pas singuliers. En effet, un point ordinaire $x$ ne peut être un point d'accumulation de l'ensemble M ; donc son écart à cet ensemble est une quantité déterminée $\Psi(x)$ différente de zéro. Il sera donc englobé nécessairement par D (en vertu de la condition 1°) dès que $\delta$ sera devenu moindre que $\Psi(x)$.

Cela posé, M. Jordan donne la définition suivante de l'*intégrale généralisée* $\int_a^b f\,dx$ :

« Si l'intégrale $\int_D f(dx)$ tend vers une limite déterminée quand $\delta$ tend vers zéro, cette limite sera désignée par $\int_a^b f\,dx$. »

Donnons à cette définition une forme plus précise :

« L'intégrale généralisée $\int_a^b f\,dx$ existe et est égale à A, si à tout nombre positif $\varepsilon$ on peut faire correspondre un nombre positif $\delta$ tel qu'on ait

$$\left|\int_D f\,dx - \mathrm{A}\right| < \varepsilon$$

pour *tout* domaine D, correspondant à ce nombre $\delta$. »

Après cela, M. Jordan donne la condition suivante de l'existence de l'intégrale définie généralisée (n° 54) :

« Pour que cette limite existe, *il faut et il suffit* évidemment qu'on puisse trouver, pour chaque valeur de $\varepsilon$, une quantité correspondante $\eta$ telle que, en appelant $D_1$ et $D_2$ deux domaines quelconques correspondant à des valeurs de la variable $\delta$ moindres que $\eta$, on ait toujours

$$\left|\int f\,dx - \int_{D_2} f\,dx\right| < \varepsilon. \text{»}$$

Mais cela serait *évident* ou plutôt serait une conséquence de la règle de convergence de Cauchy, démontrée dans le *Cours* de M. Jordan cité plus haut (t. I[er], p. 9) pour les suites des nombres, si, à toute valeur de la variable $\delta$, correspondrait *un seul* domaine D déterminé. Alors l'intégrale $\int_{\mathrm{D}} f\,dx$ représenterait une fonction uniforme de la varable $\delta$ et la conclusion serait légitime.

Mais ici, à toute valeur de $\delta$, correspond une *infinité* de domaines D et de valeurs de l'intégrale correspondante. Donc, pour pouvoir faire la conclusion désirée, il faut auparavant généraliser la règle de Cauchy. C'est ce que nous avons fait plus haut (§ 3). Il reste à établir la correspondance paramétrique pour les intégrales $\int_{\mathrm{D}} f\,dx$.

Soit $\mathrm{E}(\delta_0)$ l'ensemble de toutes les intégrales $\int_{\mathrm{D}} f\,dx$ chez lesquelles les domaines D correspondent à la valeur prise $\delta_0$ de $\delta$.

Si $\delta_1 > \delta_2$, l'ensemble $\mathrm{E}(\delta_1)$ contiendra l'ensemble $\mathrm{E}(\delta_2)$ parce qu'un domaine D, correspondant à la valeur $\delta_2$, satisfera *a fortiori* aux conditions 1° et 2° pour la valeur $\delta_1$ ; en effet, un ensemble contenant *tous* les points dont l'écart à l'ensemble M est $\geqq \delta_2$, contiendra par force *tous* les points dont l'écart est $\geqq \delta_1$ si $\delta_1 > \delta_2$.

On voit que $\lim\limits_{\delta=0} e(\delta)$ est identique à la limite désignée plus haut par $\int_a^b f\,dx$.

Maintenant nous pouvons appliquer le criterium de Cauchy-Bolzano généralisé (§ 3), ce qui nous donne la proposition suivante :

« Pour que l'intégrale généralisée $\int_a^b f\,dx$ existe, *il*

***faut et il suffit*** qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ corresponde un nombre $\delta_0 > 0$ tel qu'on ait

$$\left| \int_{D_1} f\,dx - \int_{D_2} f\,dx \right| < \varepsilon,$$

$D_1$ et $D_2$ étant deux domaines quelconques correspondant à ce nombre $\delta_0$. »

Donc cette proposition, identique à la condition donnée par M. C. Jordan, peut être regardée maintenant comme rigoureusement démontrée.

Le dernier exemple montre l'utilité, même la nécessité, de la généralisation du critère de Bolzano. Il nous semble que son application directe doit fournir des simplifications importantes, sinon des résultats nouveaux, dans diverses questions d'Analyse se rapportant aussi aux intégrales multiples et curvilignes.

Quant à la définition de limite généralisée, elle pourra être appliquée à tous les ensembles ayant des points d'accumulation. Il suffit, en effet, de transformer un *point d'accumulation* (notion statique) en un *point limite* (notion dynamique) en établissant une correspondance paramétrique convenable décrite plus haut (§ 1) entre les parties de l'ensemble considéré et les valeurs positives du paramètre $\delta$.