

**Concours d'admission à l'École normale
supérieure et aux bourses de licence en 1913**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14
(1914), p. 463-482

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__463_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1913.

Mathématiques.

GROUPE I.

I.

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy , Oz , on considère la surface (S) définie par l'équation

$$z = xy + x^3$$

et la droite (D) définie par les équations

$$y = b, \quad z = c,$$

où b et c sont deux constantes données, la seconde n'étant pas nulle. Dans tout ce qui suit, cette droite (D) restera fixe.

1° Montrer que la surface (S) est réglée et trouver ses génératrices.

2° A chaque génératrice rectiligne (G) de la surface (S) on fait correspondre le plan (P) mené par la droite (D) et parallèle à la symétrique de (G) par rapport au plan xOy . Déterminer le lieu du point d'intersection de (G) et de (P), quand la droite (G) décrit la surface (S).

Montrer que ce lieu est une courbe (C) située sur une quadrique (Q) et déterminer cette quadrique.

3° Former l'équation du quatrième degré don-

nant les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) avec un plan donné par son équation

$$ux + vy + wz + s = 0.$$

Calculer les fonctions symétriques élémentaires des racines en fonction de u, v, w, s . En déduire la relation à laquelle doivent satisfaire les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4 , de quatre points de la courbe (C) pour que ces quatre points soient dans un même plan.

Cette relation sera utile dans la plupart des questions qui vont suivre.

4° Déduire de la relation précédente les relations auxquelles doivent satisfaire les abscisses x_1, x_2, x_3 , de trois points de la courbe (C) pour que ces trois points soient en ligne droite.

Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C). Montrer que les droites qui coupent (C) en trois points engendrent l'une des familles de génératrices rectilignes de la quadrique (Q).

5° Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les plans osculateurs à la courbe (C) en trois points donnés se coupent sur la courbe (C) est que ces trois points soient en ligne droite.

6° Par un point quelconque M de la courbe (C) il passe deux plans jouissant de la propriété d'être tangents à la courbe (C) au point M et en un autre point (c'est-à-dire d'être bitangents à la courbe). Soient M' et M'' les seconds points de contact de ces deux plans. Montrer qu'il existe un plan bitangent à la courbe (C) en M' et M''.

A quelles relations doivent satisfaire les abscisses

de trois points M, M', M'' de la courbe (C) pour que deux quelconques d'entre eux soient les points de contact d'un plan bitangent à la courbe (C)?

7° Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points M, M', M'' , de la courbe (C) satisfaisant aux conditions précédentes. Exprimer les coefficients de cette équation au moyen de l'abscisse ξ du quatrième point d'intersection μ de la courbe (C) avec le plan (Π) déterminé par les points M, M', M'' .

Calculer, en fonction de ξ , les coefficients de l'équation du plan (Π) et les coordonnées du point de concours A des tangentes à la courbe (C) aux points M, M', M'' . Ce point A sera dit « le point associé au point μ de la courbe (C) ».

8° Montrer qu'il existe une infinité de quadriques, ne dépendant que de b et de c , par rapport auxquelles le point A est le pôle du plan (Π); déterminer ces quadriques et montrer que l'une d'elles est la quadrique (Q) déjà considérée.

Déterminer le lieu (Γ) du point A, ainsi que l'enveloppe du plan (Π), quand le point μ décrit la courbe (C).

9° A trois points quelconques en ligne droite μ_1, μ_2, μ_3 , pris sur la courbe (C), sont associés les trois sommets A_1, A_2, A_3 , d'un triangle inscrit dans la courbe (Γ). Déterminer, en supposant $b = 0$, l'enveloppe des côtés de ce triangle quand la droite $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ varie. Montrer que, dans la même hypothèse $b = 0$, le cercle circonscrit au triangle $A_1 A_2 A_3$ passe par deux points fixes.

(Durée : 6 heures.)

II.

On donne deux axes rectangulaires et l'on considère l'équation différentielle

$$y - 2xy' + y^2y'^3 = 0.$$

1° Montrer que cette équation admet une infinité de courbes intégrales C, dont l'équation est de la forme $y^2 = f(x)$, $f(x)$ désignant un polynôme en x . Écrire l'équation générale des courbes C; montrer que, par tout point du plan, il passe soit une, soit trois courbes C, et déterminer la région du plan où doit se trouver le point pour que le nombre des courbes qui y passent soit égal à trois; déterminer le lieu des points tels que deux des courbes C qui passent par l'un d'eux soient orthogonales.

2° On donne le point A ($x = 0,5$; $y = 0$). Soit P celle des courbes C qui passe par A et tourne sa concavité vers la partie positive de l'axe Ox; soit B le point de la courbe P qui a pour ordonnée $\sqrt{6}$. Soit Q celle des courbes C passant par B et qui tourne sa concavité vers les x négatifs; soit enfin A' le point où cette courbe coupe l'axe Ox. Calculer l'aire limitée par les arcs de courbes AB, BA', et l'axe Ox.

3° Un point mobile, partant de A, parcourt successivement l'arc AB de P, puis l'arc BA' de Q. Son accélération tangentielle est constamment égale à sa vitesse, et sa vitesse initiale est égale à 1; au point B on supposera que la vitesse ne subit pas de changement de grandeur, mais seulement un changement de direction. Calculer à 0,1 près le temps mis par le mobile pour parcourir l'arc ABA'.

(467)

4° Au point B, l'accélération du mobile subit une discontinuité. Calculer, par ses projections sur les deux axes de coordonnées, la variation géométrique du vecteur-accélération au point B.

(Durée : 4 heures.)

SOLUTIONS PAR M. R. BOUVAIST.

I.

1° L'équation aux ρ des points d'intersection de la surface (S) et de la droite

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} = \rho$$

est

$$\alpha^3 \rho^3 + (3x_0 \alpha^2 + \alpha \beta) \rho^2 + (3\alpha x_0^2 + \beta x_0 + \alpha y_0 - \gamma) \rho - z_0 + x_0 y_0 + x_0^3 = 0;$$

pour que cette droite soit une génératrice de la surface (S) il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ \beta x_0 - \gamma &= 0, \\ z_0 &= x_0 y_0 + x_0^3. \end{aligned}$$

Une génératrice G de (S) aura pour équations

$$x = t, \quad z = ty + t^3.$$

2° Le plan (P) a pour équation

$$z - c + t(y - b) = 0;$$

les équations de la courbe (C) seront

$$\begin{aligned} z - c + t(y - b) &= 0, \\ x &= t, \\ z &= ty + t^3 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}x &= t, \\y &= \frac{-t^3 + tb + c}{2t}, \\z &= \frac{t^3 + tb + c}{2};\end{aligned}$$

cette courbe est sur la quadrique (Q),

$$x(y - b) + z - c = 0.$$

3° L'équation aux t du point d'intersection du plan

$$ux + vy + wz + s = 0$$

et de la courbe (C) est

$$wt^4 - vt^3 + t^2(2u + bw) + t(bv + cw + 2s) + cv = 0;$$

si t_1, t_2, t_3, t_4 sont les racines de cette équation,

$$\begin{aligned}\Sigma t_i &= \frac{v}{w}, & \Sigma t_i t_j &= \frac{2u + bw}{w}, \\ \Sigma t_i t_j t_k &= -\frac{bv + cw + 2s}{w}, & t_1 t_2 t_3 t_4 &= \frac{cv}{w}.\end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de (C) soient dans un même plan est que leurs abscisses soient liées par la relation

$$(1) \quad \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{1}{c}.$$

4° La relation (1) nous donne

$$x_4 = \frac{c(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1 x_2 x_3 - c};$$

si les points d'abscisses x_1, x_2, x_3 sont en ligne droite, x_4 est indéterminé et l'on a

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 x_2 x_3 - c &= 0.\end{aligned}$$

Les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C) seront les racines de l'équation générale

$$X^3 + \lambda X - c = 0.$$

Les deux systèmes de génératrices de la quadrique Q sont

$$\text{I } \begin{cases} x = \mu_1, \\ (y-b)\mu_1 + z - c = 0; \end{cases} \quad \text{II } \begin{cases} y = \mu_2, \\ x(\mu_2 - b) + z - c = 0. \end{cases}$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection des génératrices du système (I) avec la surface (S) est

$$x^3 + x(2y - b) - c = 0;$$

ces génératrices rencontrent par suite (C) en trois points en ligne droite.

5° Le plan osculateur en un point x_1 de (C) rencontre la courbe au point x'_1 , tel que

$$x'_1 = \frac{3cx_1}{x_1^3 - c},$$

d'où

$$x_1^3 - \frac{3c}{x_1^2} x_1 - c = 0;$$

cette équation est l'équation aux abscisses des points d'osculation des plans osculateurs à (C) menés par un point x'_1 de la courbe; sa forme montre que les trois points d'osculation sont en ligne droite.

6° Un plan tangent à (C) en x_1 rencontrera la courbe en deux points dont les abscisses sont liées par la relation

$$\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{x_1^2 x_2 x_3} = \frac{1}{c};$$

par x_1 passent donc deux plans bitangents à la courbe; les abscisses des seconds points de contact sont les

racines de l'équation

$$x_1^2 x^2 - 2cx - 2cx_1 = 0 :$$

si x' et x'' sont les racines de cette équation, on a

$$x' + x'' = \frac{2c}{x_1^2},$$

$$x' x'' = -\frac{2c}{x_1},$$

d'où

$$\frac{2(x' + x'')}{x'^2 x''^2} = \frac{1}{c},$$

relation qui montre que x' et x'' sont les contacts d'un plan bitangent à (C).

Si M, M', M'' sont trois points de (C), tels que deux quelconques d'entre eux sont les contacts d'un plan bitangent, leurs abscisses seront liées par les relations

$$\frac{2(x_1 + x_2)}{x_1^2 x_2^2} = \frac{2(x_1 + x_3)}{x_1^2 x_3^2} = \frac{2(x_2 + x_3)}{x_2^2 x_3^2} = \frac{1}{c},$$

d'où, par soustraction,

$$x_1^2(x_2 + x_3) = x_2^2(x_1 + x_3) = x_3^2(x_1 + x_2) = 2c,$$

d'où

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 0.$$

$$x_1 x_2 x_3 = -2c.$$

7° L'équation générale donnant les abscisses des trois points M, M', M'' est donc

$$x^3 - \lambda x^2 + 2c = 0;$$

nous avons

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \xi}{x_1 x_2 x_3 \xi} = \frac{1}{c} \quad \text{d'où} \quad \lambda + 3\xi = 0$$

et l'équation devient

$$x^3 + 3\xi x^2 + 2c = 0.$$

(471)

Si le plan Π a pour équation

$$ux + vy + wz + s = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \xi = -2\xi = \frac{v}{w},$$

$$\Sigma x_i x_j + \xi \Sigma x_i = -3\xi^2 = \frac{2u + bw}{w},$$

$$x_1 x_2 x_3 + \xi \Sigma x_i x_j = -2c = -\frac{bv + cw + 2s}{w};$$

l'équation du plan Π sera donc

$$x(3\xi^2 + b) + 4\xi y - 2z - (c + 2b\xi) = 0.$$

La projection de la courbe (C) sur xOz a pour équations

$$x = t,$$

$$z = \frac{t^3 + bt + c}{2};$$

l'équation aux abscisses des points de contact des tangentes à cette courbe issues du point x_0, z_0 est

$$x^3 - \frac{3}{2} x_0^2 x^2 + 2z_0 x - bx_0 - c = 0.$$

Identifions cette équation à l'équation

$$x^3 + 3\xi x^2 + 2c = 0,$$

nous aurons,

$$x_0 = -2\xi,$$

$$z_0 = \frac{5c - 2b\xi}{2}.$$

La même méthode appliquée à la projection de (C) sur xOz donne

$$y_0 = \frac{b - 3\xi^2}{2}.$$

(472)

Les coordonnées de μ sont donc

$$\begin{aligned}x_{\mu} &= -2\xi, \\y_{\mu} &= \frac{b-3\xi^2}{2}, \\z_{\mu} &= \frac{5c-2b\xi}{2}.\end{aligned}$$

8° Considérons la quadrique $f(xyz) = 0$, le plan polaire de μ par rapport à cette quadrique est

$$xf'_{x\mu} + yf'_{y\mu} + zf'_{z\mu} + tf'_{t\mu};$$

ce plan polaire doit coïncider avec le plan Π quel que soit ξ ; on doit donc avoir

$$\begin{aligned}f'_{x\mu} &= \lambda(3\xi^2 + b), & f'_{y\mu} &= 4\lambda\xi, \\f'_{z\mu} &= -2\lambda, & f'_{t\mu} &= -\lambda(c + 2b\xi);\end{aligned}$$

quel que soit ξ , ces équations déterminent les coefficients de $f(xyz) = 0$, linéairement en fonction de deux d'entre eux, et l'on trouve sans peine

$$f(xyz) = (bx - 2z + 5c)^2 + \lambda[x(y - b) + z - c] = 0.$$

Les quadriques considérées sont donc de raccordement avec la quadrique (Q), le long de l'intersection de cette quadrique avec le plan polaire du point $0, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}$, par rapport à elle.

L'enveloppe de Π est le cône

$$(2y - b)^2 - 3(bx - 2z - c) = 0,$$

ayant pour sommet le point $0, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}$.

Le lieu Γ du point A est la conique

$$\begin{aligned}x &= -2\xi, \\y &= \frac{b-3\xi^2}{2}, \\z &= \frac{5c-2b\xi}{2}.\end{aligned}$$

(473)

9° Si $b = 0$, la courbe Γ devient la parabole

$$\begin{aligned}x &= -2\xi, \\y &= -\frac{3\xi^2}{2}, \\z &= \frac{5c}{2}.\end{aligned}$$

Si ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les abscisses des points μ_1, μ_2, μ_3 qui par hypothèse sont en ligne droite, nous aurons

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ \xi_1 \xi_2 \xi_3 = c. \end{cases}$$

La corde $A_1 A_2$ a pour équations

$$\begin{aligned}3x(\xi_1 + \xi_2) - 4y + 6\xi_1 \xi_2 &= 0, \\z &= \frac{5c}{2},\end{aligned}$$

ou

$$3x\xi_3^2 + 4\lambda - 6c = 0:$$

elle enveloppe la parabole

$$\begin{aligned}2y^2 - 9cx &= 0, \\z &= \frac{5c}{2}.\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma &= 0, \\z &= \frac{3c}{2},\end{aligned}$$

le cercle $A_1 A_2 A_3$; l'équation aux ξ des points d'intersection de ce cercle et de Γ est

$$9\xi^4 + 2\xi^2(3\beta + 4) + 8\alpha\xi + 2\gamma = 0;$$

si $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sont les racines de cette équation, on a

$$\Sigma \xi_i = 0, \quad \Sigma \xi_i \xi_j \xi_k = -\frac{8\alpha}{9},$$

d'où, en ayant égard aux relations (1),

$$\xi_4 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\gamma = 0, \quad \alpha = -\frac{9c}{8};$$

le cercle $A_1 A_2 A_3$ passe donc par le sommet de la parabole Γ , et son centre décrit une perpendiculaire à l'axe de Γ ; il passe donc par deux points fixes.

II.

1° L'équation

$$y - 2xy' + y^2 y'^3 = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{y}{y'} - 2x + y^2 y'^2 = 0,$$

d'où, par dérivation,

$$\left(2yy' - \frac{1}{y'^2}\right)(y'^2 + yy'') = 0.$$

L'équation

$$y'^2 + yy'' = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{y'}{y} + \frac{y''}{y'} = 0;$$

son intégrale est

$$y^2 = Cx + C'.$$

Considérons maintenant l'équation

$$2yy' - \frac{1}{y'^2} = 0;$$

en posant $y' = p$, on a

$$y = \frac{1}{2p^2}$$

et

$$dx = -\frac{3}{2} \frac{1}{p^3},$$

(475)

d'où

$$x = \frac{3}{8} \frac{1}{p^4} + C.$$

On voit d'ailleurs facilement que, pour que la fonction

$$y^2 = Cx + C'$$

vérifie l'équation différentielle donnée, il faut prendre

$$C = 2\lambda, \quad C' = -\lambda^3.$$

L'équation générale des courbes (C) est donc

$$y^2 = 2\lambda x - \lambda^3.$$

Par un point du plan passent trois courbes (C), elles sont toutes trois réelles si l'on a

$$27y^4 - 32x^3 < 0,$$

c'est-à-dire dans la portion du plan situé entre l'axe Ox et la courbe

$$27y^4 - 32x^3 = 0.$$

En un point de cette portion du plan, les coefficients angulaires des tangentes aux courbes (C) passant par ce point sont $\frac{\lambda_1}{y}, \frac{\lambda_2}{y}, \frac{\lambda_3}{y}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant les racines de l'équation

$$\lambda^3 - 2\lambda x + y^2 = 0.$$

Si deux de ces courbes (C) sont rectangulaires,

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{y^2} = -1, \quad \text{d'où} \quad \lambda_3 = 1;$$

le lieu des points du plan par où passent deux courbes (C) orthogonales est donc la parabole

$$y^2 - 2x + 1 = 0.$$

2° Par le point A ($x = 0, y = 0$) passent les trois

(476)

courbes (C)

$$\begin{aligned}y^2 &= 0, \\y^2 &= 2x - 1, \\y^2 &= -2x + 1;\end{aligned}$$

la courbe (P) est la courbe

$$y^2 = 2x - 1.$$

Par le point situé sur cette courbe ayant pour ordonnées $\sqrt{6}$, passent outre la courbe (P) les deux courbes (C),

$$\begin{aligned}y^2 &= 4x - 8, \\y^2 &= -6x + 27.\end{aligned}$$

La courbe (Q) est la parabole $y^2 = -6x + 27$; elle coupe Ox au point $A'(x = \frac{9}{2}, y = 0)$.

L'aire comprise entre la courbe (P), Ox et la perpendiculaire à Ox menée par le point d'ordonnée $\sqrt{6}$ est $\int_0^{\sqrt{6}} y^2 dy$; l'expression analogue relative à la courbe (Q) est $\int_0^{\sqrt{6}} \frac{y^2 dy}{3}$; l'aire cherchée est donc

$$\frac{4}{3} \int_0^{\sqrt{6}} y^2 dy = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

3° L'accélération tangentielle étant égale à la vitesse, on a

$$\frac{dv}{dt} = v,$$

d'où

$$v = e^{t+k},$$

pour

$$t = 0, \quad v = 1;$$

donc $k = 0$ et l'on a

$$v = e^t.$$

L'équation donnant le temps t cherché sera donc

$$e^t = \text{arc AB} + \text{arc BA}' ;$$

$$\begin{aligned} \text{arc AB} &= \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{1+y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \left| L(y + \sqrt{1+y^2}) + y \sqrt{1+y^2} \right|_0^{\sqrt{6}} \\ &= \frac{L(\sqrt{6} + \sqrt{7}) + \sqrt{42}}{2} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{arc BA}' &= \int_0^{\sqrt{6}} dy \sqrt{1 + \frac{y^2}{9}} \\ &= \frac{3}{2} \left| L \frac{y + \sqrt{y^2 + 9}}{3} + \frac{y \sqrt{y^2 + 9}}{9} \right|_0^{\sqrt{6}} \\ &= \frac{3}{2} \left(L \frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{3} + \frac{\sqrt{90}}{9} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$e^t = \frac{L(\sqrt{6} + \sqrt{7}) + \sqrt{42}}{2} + \frac{3}{2} \left(L \frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{3} + \frac{\sqrt{90}}{9} \right),$$

d'où

$$t = \frac{1}{2(\log e)^2} \left[\log(\sqrt{6} + \sqrt{7}) + 3 \log \frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{3} \right] + \frac{3\sqrt{42} + \sqrt{90}}{6 \log e},$$

d'où

$$t = 12,707 \text{ à } 0,01 \text{ près.}$$

4° Soit φ l'angle aigu de la normale et de la tangente à la courbe (P) en B, θ l'angle correspondant de la courbe (Q) en B; les projections sur les axes de l'accélération du mobile au point B de (P) sont

$$\gamma_x = \frac{dv}{dt} \cos \varphi + \frac{v^2}{\rho_1} \sin \varphi,$$

$$\gamma_y = \frac{dv}{dt} \sin \varphi - \frac{v^2}{\rho_1} \cos \varphi;$$

(478)

or

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{6}}, & \cos \varphi &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, & \sin \varphi &= \frac{1}{\sqrt{7}}, \\ \rho_1 &= \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = 7\sqrt{7}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \gamma_x &= e^t \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} + \frac{e^t}{49} \right), \\ \gamma_y &= e^t \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{e^t \sqrt{6}}{49} \right). \end{aligned}$$

On a de même pour la courbe (Q)

$$\begin{aligned} \gamma'_x &= \frac{dv}{dt} \cos \theta - \frac{v^2}{\rho_2} \sin \theta, \\ \gamma'_y &= - \left(\frac{dv}{dt} \sin \theta + \frac{v^2}{\rho_2} \cos \theta \right); \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \theta &= \frac{3}{\sqrt{6}}, & \cos \theta &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}, & \sin \theta &= \frac{3}{\sqrt{15}}, \\ \rho_2 &= \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{15\sqrt{15}}{9}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \gamma'_x &= e^t \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} - \frac{3e^t}{25} \right), \\ \gamma'_y &= -e^t \left(\frac{3}{\sqrt{15}} + \frac{2e^t \sqrt{6}}{25} \right). \end{aligned}$$

Les projections de la variation géométrique du vecteur accélération en B sont donc

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= e^t \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} \right) + e^{2t} \left(\frac{1}{49} + \frac{3}{25} \right), \\ \Gamma_y &= e^t \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{15}} \right) - e^{2t} \left(\frac{\sqrt{6}}{49} - \frac{\sqrt{6}}{25} \right). \end{aligned}$$

GROUPE II.

I.

On considère dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy . Un point matériel M , de masse égale à un, est mobile dans un plan sous l'action d'une force (F) dont les projections X et Y sur les axes sont

$$X = x, \quad Y = y - 4x,$$

x et y désignant les coordonnées du point M :

1° Former et intégrer les équations différentielles du mouvement du point M .

2° Déterminer le mouvement de M en supposant qu'à l'origine du temps ses coordonnées sont $(x, 0)$ et que sa vitesse a pour projections sur les axes $(-x, 2x)$. Construire la trajectoire (T) correspondant à ce mouvement.

3° Évaluer le temps mis par le mobile pour aller d'un point quelconque M de sa trajectoire (T) au point M' , où la tangente à la trajectoire est parallèle au rayon vecteur OM .

4° Démontrer que l'hodographe du mouvement est une courbe homothétique de la trajectoire (T) et calculer à 0,01 près le rapport d'homothétie.

5° La trajectoire (T) passe par le point O . Évaluer, en fonction de l'abscisse du point M , l'aire limitée par l'arc de courbe OM et la corde OM , ainsi que le volume engendré par cette aire tournant autour de Oy .

II.

Évaluer à 0,01 près les intégrales

$$\int^{\pi} \frac{dx}{2 \cos x + 3}, \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 \cos x + 3)^2}.$$

I.

1° On a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = y - 4x$$

l'intégrale générale de $\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 0$ est

$$x = C \left[\frac{e^{(t+k)} + e^{-(t+k)}}{2} \right];$$

l'intégrale générale de $\frac{d^2 y}{dt^2} = y - 4x$ est de la forme

$$y = Ct[\lambda e^{t+k} + \mu e^{-(t+k)}].$$

Pour que cette fonction satisfasse à l'équation différentielle donnée il faut prendre, comme on le voit aisément, $\lambda = -1$, $\mu = 1$; on aura donc

$$x = C \frac{e^{t+k} + e^{-(t+k)}}{2} = C \operatorname{ch}(t+k),$$

$$y = -Ct[e^{t+k} - e^{-(t+k)}] = -2Ct \operatorname{sh}(t+k).$$

2° Les conditions initiales donnent

$$C \operatorname{ch} k = \alpha, \quad C e^k + C e^{-k} = 2\alpha,$$

$$C \operatorname{sh} k = -\alpha, \quad C e^k - C e^{-k} = -2\alpha;$$

d'où

$$C e^k = 0,$$

$$C e^{-k} = 2\alpha;$$

les équations de (T) sont donc

$$x = \alpha e^{-t},$$

$$y = 2\alpha t e^{-t};$$

(T) serait d'une construction facile.

(481)

3° La tangente en M' a pour coefficient angulaire $2(t' - 1)$; le coefficient angulaire de OM est $2t$.

Si la tangente en M' est parallèle à OM ,

$$2(t' - 1) = 2t, \quad t' - t = 1;$$

le temps mis par le mobile pour aller de M en M' est donc constant et égal à 1.

4° L'hodographe a pour équations

$$\begin{aligned}x &= -\alpha e^{-t}, \\y &= 2\alpha(1 - t)e^{-t};\end{aligned}$$

soit sur (T) un point de coordonnées x_1 et y_1 correspondant au temps t , sur l'hodographe un point de coordonnées x_2 et y_2 correspondant au temps $t + 1$; on a

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = -e;$$

les deux courbes sont donc homothétiques, le centre d'homothétie est l'origine, et le rapport d'homothétie

$$-e = -2,71 \text{ à } 0,01 \text{ près.}$$

5° L'aire cherchée est

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{+\infty} + 2\alpha^2 t e^{-2t} dt - \alpha^2 t e^{-2t}, \\2\alpha^2 \int_{t_1}^{+\infty} t e^{-2t} dt = \alpha^2 t_1 e^{-2t_1} + \frac{\alpha^2}{2} e^{-2t_1},\end{aligned}$$

d'où

$$\text{aire} = \frac{\alpha^2}{2} e^{-2t_1} = \frac{x_1^2}{2},$$

x_1 étant l'abscisse de M .

On a de même, en désignant par x_1, y_1 les coor-

données de M :

$$\begin{aligned} \text{Volume cherché} &= \frac{\pi}{3} x_1^2 y_1 - \int_{+\infty}^{t_1} \pi x^2 dy \\ &= \frac{2\pi\alpha^3}{3} t_1 e^{-3t_1} - 2\pi\alpha^3 \int_{+\infty}^{t_1} e^{-3t} dt - t_1 e^{-3t_1} dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Volume cherché} &= \frac{2\pi\alpha^3}{3} t_1 e^{-3t_1} - 2\pi\alpha^3 \left(\frac{t_1 e^{-3t_1}}{3} - \frac{2e^{-3t_1}}{9} \right) \\ &= \frac{4\pi\alpha^3}{9} e^{-3t_1}, \end{aligned}$$

$$\text{Volume cherché} = \frac{4\pi\alpha^3}{9}.$$

II.

Posons

$$\text{tang } \frac{x}{2} = t,$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx}{2 \cos x + 3} &= \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{t^2 + 5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dt}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{t^2}{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left| \text{arc tang } \frac{t}{\sqrt{5}} \right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}, \\ \frac{\pi}{\sqrt{5}} &= 1,404, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx}{(2 \cos x + 3)^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{2 dt(1+t^2)}{(t^2+5)^2} \\ &= \frac{2}{5} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+5} + \frac{4}{5} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 dt}{(t^2+5)^2} \\ &= \frac{3}{5} \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{t^2+5} - \left| \frac{4t}{5(t^2+5)} \right|_0^{+\infty} \\ &= \frac{3\pi}{5\sqrt{5}} = 0,842. \end{aligned}$$
