NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

Sur le point de Feuerbach

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 457-460

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__457_0>

[K2b, c]

SUR LE POINT DE FEUERBACH;

Par M. R. BOUVAIST.

Je voudrais, dans les quelques lignes qui vont suivre, énoncer et démontrer rapidement, quelques propriétés peut-être nouvelles du point de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points d'un triangle. Je désignerai par A, B, C les sommets du triangle, a, b, c les milieux des côtés, D, E, F les points de contact des côtés et du cercle inscrit, G le centre de gravité, I le centre du cercle inscrit.

1° *Construction d'Hamilton.* — Considérons deux coniques Σ et Σ' touchant les côtés du triangle ABC en α, β, γ, α', β', γ', les diagonales d'un quadrilatère inscrit et du quadrilatère circonscrit correspondant se coupant au même point. Si l'on désigne par u l'intersection de $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$, les droites Bu, Cu rencontrent AC, BA en Q et R, QR est la quatrième tangente commune à Σ et Σ', αU et α'U coupent QR en δ et δ' qui sont les contacts de cette droite avec Σ et Σ'.

Si Σ est le cercle inscrit, Σ' la conique touchant les côtés en a, b, c, on a immédiatement la construction classique d'Hamilton et l'on voit qu'on peut, dans cette construction, remplacer Σ' par une conique quelconque du faisceau tangentiel $\Sigma + \lambda\Sigma' = 0$.

Le lieu des centres des coniques de ce faisceau est la droite IG; soit O un point de cette droite, les droites aO, bO, cO coupent bc, ca, ab en O_1, O_2, O_3;

les droites AO_1, BO_2, CO_3 rencontrent BC, CA, AB en L, M, N et se coupent en un point ω. La conique de centre O inscrite dans le triangle ABC touche les côtés en L, M, N, car le lieu des centres des coniques inscrites dans ABC et touchant BC en L est la droite aO, Les parallèles aO, bO, cO menées par A, B, C se coupent en ω' et rencontrent BC, CA, AB en L′, M′, N′, les deux triangles ABC, abc étant homothétiques par rapport à G dans le rapport 2, les points O, G, ω' sont en ligne droite, $2\,OG = \omega' G$, et les points L, L′, M, M′, N, N′ sont symétriques par rapport à a, b, c. Si O décrit la droite IG, ω' décrit aussi IG et ω une conique circonscrite à ABC. On a donc la proposition suivante :

Soient ABC *un triangle*, I *le centre du cercle inscrit*, G *le centre de gravité;* D, E, F *les contacts du cercle inscrit avec* BC, CA, AB; O *un point quelconque de* IG; *les droites* AO, BO, CO *rencontrent* BC, CA, AB *en* L, M, N; *soient* L′, M′, N′ *les symétriques de ces points par rapport aux milieux des côtés de* ABC, *les droites* M′N′, EF, N′L′, FD, L′M′, DE *se coupent en* U, V, W; *les droites* DU, EV, FW *passent par le point de Feuerbach du triangle* ABC.

2° Nous allons indiquer maintenant une seconde extension de la construction d'Hamilton.

Théorème. — *Si* C_1, C_2, C_3 *sont trois coniques touchant les côtés d'un triangle en* $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$, *les droites* $b_2 c_2$, BC, $c_2 a_2$, CA, $a_2 b_2$, AB *se coupent en* α_2, β_2, γ_2, *si* $a_1 a_3$, $b_1 b_3$, $c_1 c_3$ *sont conjugués harmoniques par rapport à* $a_2 \alpha_2$, $b_2 \beta_2$, $c_2 \gamma_2$, *les tangentes communes* Δ_{12}, Δ_{32} *à* $C_1 C_2$, $C_2 C_3$ *se couen un point* φ *qui est commun à* C_1 *et* C_3, ou corrélativement :

C_1, C_2, C_3 *étant trois coniques circonscrites à un triangle* ABC, *si les tangentes à* C_1 *et* C_3 *en un sommet quelconque* A *forment faisceau harmonique avec la tangente à* C_2 *en* A *et la droite joignant ce point au pôle de* BC *par rapport à* C_2, *la droite joignant les quatrièmes points d'intersection de* $C_1 C_2$, $C_2 C_3$ *est une tangente commune à* C_1 *et* C_3.

Si aux deux points B et C nous faisons correspondre les points cycliques, C_1, C_2, C_3 deviennent trois cercles O_1, O_2, O_3, passant par un même point A; les droites AO_1, AO_3 sont également inclinées sur la tangente à O_2 en A, et deux droites isotropes parallèles issues de O_1 et O_3 rencontrent la tangente à O_2 en A en des points formant division harmonique avec les points d'intersection de cette tangente avec les droites isotropes issues de O_2.

En désignant par R_1, R_2, R_3 les rayons des trois cercles, par α l'angle des droites AO_1, AO_2 avec la tangente en A à O_2, cette dernière condition s'exprime par l'égalité $R_1(-\cos\alpha + i\sin\alpha)R_3(\cos\alpha + i\sin\alpha) = -R_2^2$ ou $R_1 R_3 = R_2^2$.

Une inversion de centre A transforme enfin la proposition à démontrer en la suivante : Étant donné un triangle isoscèle $\alpha\beta\gamma$ ($\alpha\beta = \alpha\gamma$), si les distances $A\alpha'$, $A\beta'$, $A\gamma'$ d'un point A aux côtés $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sont liées par la relation $\overline{A\alpha'}^2 = A\beta'.A\gamma'$, le point A est sur le cercle tangent à $\alpha\beta$ en β et à $\alpha\gamma$ en γ.

Or la relation $\overline{A\alpha'}^2 = A\beta'.A\gamma'$ entraîne la similitude des triangles $\alpha'A\beta'$, $\alpha'A\gamma'$ dont les angles en A sont égaux, et de cette similitude il résulte immédiatement que l'angle $\widehat{\beta A\gamma} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\beta\alpha\gamma}$, ce qui démontre la proposition. Le théorème énoncé au début du paragraphe est donc démontré ; on en déduit immédiatement que :

O *étant un point quelconque de la droite joignant le centre de gravité d'un triangle* ABC *au centre du cercle inscrit, les droites* AO, BO, CO *coupent* BC, CA, AB *en* L, M, N ; L', M', N' *étant les symétriques de ces points par rapport aux milieux des côtés, les droites* M'N', N'L', L'M' *coupent* BC, CA, AB *en* U, V, W, *si* D', E', F' *sont les conjugués harmoniques des points de contact* D, E, F *du cercle inscrit avec les côtés* BC, CA, AB, *par rapport aux points* UL', VM', WN' :

1° *La conique inscrite dans le triangle* ABC *aux points* D', E', F' *passe par le point de Feuerbach;*

2° *Les droites* M'N', N'L', L'M' *rencontrent les droites* EF, FD, DE *en* U_1, V_1, W_1, *les droites* E'F', F'D', D'E' *en* U_2, V_2, W_2, *les six droites* DU_1, EV_1, FW_1, $D'U_2$, $E'V_2$, $F'W_2$ *passent par le point de Feuerbach.*

De cette propriété générale découle un grand nombre de propriétés particulières, analogues à la suivante :

Si a, b, c sont les milieux des côtés d'un triangle ABC, P, Q, R *les points de contacts de* BC, CA, AB *avec les cercles exinscrits dans les angles* A, B, C :

1° *La conique tangente à* BC, CA, AB *en* P, Q, R *passe par le point de Feuerbach;*

2° *Les droites* QR, RP, PQ *coupant bc, ca, ab en* α, β, γ, *les droites* Pα, Qβ, Rγ *passent par le point de Feuerbach.*