Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles (Deuxième partie)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 371-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__371_1>

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES.

(DEUXIÈME PARTIE.)

Session de 1914. — Mathématiques.

On pose

$$(1) \qquad y = \mathrm{A} \cos 5u + \mathrm{B} \sin 5u,$$

$$(2) \qquad x = \cos u,$$

u étant une variable, A *et* B *étant des constantes; y est ainsi une fonction de x.*

1° *Montrer qu'il existe entre* x, y, y', y'' (*les accents indiquent des dérivées par rapport à* x) *une relation indépendante des constantes* A *et* B. — *Former cette relation en appliquant la formule*

$$y'_u = y'_x \times x'_u.$$

On trouvera

$$(3) \qquad (1 - x^2)y'' - xy' + 25y = 0.$$

2° *Si l'on propose de satisfaire à cette équation différentielle en prenant pour y un polynome de degré donné. au moins égal à* 2,

$$y = a(x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots),$$

ce problème paraît-il bien posé, c'est-à-dire dispose-t-on d'autant de paramètres arbitraires qu'il y a de conditions à remplir? Montrer qu'il faut prendre $m = 5$, *et que le polynome renferme alors une constante arbitraire* a;

faire le calcul en posant

$$y = ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f;$$

on mettra le résultat sous la forme

$$y = e(16x^5 - \ldots) = \varphi(x)$$

avec e comme constante arbitraire.

3° *Les relations* (1) *et* (2) *définissent y comme fonction de x,* $y = f(x)$. *Montrer que* $f(x)$ *ne peut être identifié avec* $\varphi(x)$ *que si les constantes* A *et* B *vérifient une relation (condition nécessaire). — En changeant u en — u, faire voir que l'identification en question exige que l'on ait* $B = 0$ *(condition nécessaire); en changeant u en* $\pi - u$, *faire voir que cette identification a alors des chances de réussir, vu la forme du polynome* $\varphi(x)$. — *En admettant que l'on sache que* $\cos 5u$ *s'exprime en fonction de* $\cos u$ *par un polynome entier, montrer que les faits du second paragraphe permettent d'obtenir cette expression, et la donner.*

4° *Déduire de là une solution de l'équation différentielle* (3) *renfermant deux constantes arbitraires, et la mettre sous la forme*

$$y = A\varphi(x) \pm B(4x^2 + 2x - 1)\sqrt{1-x}$$
$$\times (4x^2 - 2x - 1)\sqrt{1+x},$$

avec $e = 1$ *dans* $\varphi(x)$. — *Vérifier qu'on peut écrire*

$$y = A\varphi(x) \pm \frac{B}{5}\varphi'(x)\sqrt{1-x^2}.$$

Est-il possible d'obtenir directement le résultat sous cette dernière forme? — On pourra rendre compte de la formule

$$1 - \cos 5u = (1 - \cos u)(4\cos^2 u + 2\cos u - 1)^2,$$

qui s'est présentée au cours du calcul, en annulant les deux membres; on changera ensuite u en $\pi - u$.

SOLUTION PAR M^lle R. MILANE.

1° On pose

$$(1) \qquad y = A\cos 5u + B\sin 5u,$$
$$(2) \qquad x = \cos u,$$

de sorte que y est une fonction de x. On peut *imaginer* qu'on exprime $\cos 5u$ et $\sin 5u$ en fonction de $\cos u$ ou de x, au moyen de la formule de Moivre, par exemple; on aurait alors

$$y = F(x), \qquad y' = G(x), \qquad y'' = H(x),$$

et l'on pourrait éliminer A et B entre ces trois relations.

Mais, comme on va le voir, on peut faire cette élimination sans exprimer $\cos 5u$ et $\sin 5u$ en fonction de $\cos u$; *on aura l'équation différentielle* (3), *et l'on en déduira au contraire l'expression de* $\cos 5u$ *en fonction de* $\cos u$; on écrira ensuite

$$\sin^2 5u = 1 - \cos^2 5u = (1 - \cos 5u)(1 + \cos 5u) = \ldots.$$

Voici un calcul qui met bien les idées en évidence. Si l'on écrit :

$$(1) \qquad y = A\cos 5u + B\sin 5u,$$
$$(1') \qquad y'_u = 5(-A\sin 5u + B\cos 5u),$$
$$(1'') \qquad y''_u = -25(A\cos 5u + B\sin 5u),$$

on peut éliminer A et B entre ces trois relations, et l'on a

$$(R) \qquad y''_u + 25y = 0;$$

il reste à exprimer y''_u en fonction de x, y, y'_x, y''_x. Or on a, d'une manière générale,

$$y'_u = y'_x x'_u,$$
$$y''_u = y''_x (x'_u)^2 + y'_x x''_u;$$

avec $x = \cos u$, cette dernière relation donne

$$y''_u = y''_x \sin^2 u - y'_x \cos u = (1 - x^2)y''_x - xy'_x;$$

la relation (R) devient

$$(3)\qquad (1-x^2)y''-xy'-25y=0.$$

[On pourrait, plus sommairement, déduire de la relation (1)

$$5(-A\sin 5u+B\cos 5u)=y'_x-\sin u,$$

et de là

$$-25(A\cos 5u+B\sin 5u)=y''_x\sin^2 u-y_x\cos u,$$

ou

$$-25y=(1-x^2)y''-xy'.]$$

2° Si l'on essaie de satisfaire à cette équation différentielle en prenant

$$y=a(x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots),$$

le premier nombre de la relation (3) devient un polynome en x du degré m qui doit s'annuler identiquement; cela donne $m+1$ conditions. Comme cette relation (3) est homogène par rapport à y, y', y'', le coefficient a se met en facteur, et l'on dispose seulement de m paramètres $p, q, \ldots$ Le problème est probablement impossible avec m quelconque.

Le calcul donne

$$\begin{aligned}(1-x^2)&[m(m-1)x^{m-2}+\ldots]\\ &-x(mx^{m-1}+\ldots)-25(x^m+\ldots)\equiv 0;\end{aligned}$$

le coefficient du terme de degré m est

$$-m(m-1)-m+25 \qquad \text{ou} \qquad -m^2+25;$$

on l'annulera en donnant à m la valeur entière $m=5$. Il reste alors m conditions entre les m paramètres $p, q, \ldots$; le coefficient a pourra être quelconque.

Si l'on écrit

$$\left.\begin{aligned} y &= ax^5+5bx^4+10cx^3+10dx^2+5ex+f,\\ y':5 &= ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e,\\ y'':5 &= 4ax^3+12bx^2+12cx+4d,\end{aligned}\right|\begin{aligned}&+5\\&-x\\&1-x^2\end{aligned}$$

en annulant successivement les coefficients du polynome fourni par

$$(1-x^2)\frac{y''}{5}-x\frac{y'}{5}+5y.$$

on a

$$b = 0, \qquad a + 8c = 0, \qquad d = 0, \qquad c + 2e = 0, \qquad f = 0,$$

ou

$$b = 0, \qquad d = 0, \qquad f = 0, \qquad c = -2e, \qquad a = 16e;$$

le polynome demandé est donc

$$(4) \qquad y = e(16x^5 - 20x^3 + 5x) = \varphi(x).$$

3° Les relations (1) et (2) définissent y comme fonction de x, $y = f(x)$, et cette fonction dépend de deux paramètres A et B; elle ne peut être identifiée avec le polynome $\varphi(x)$, qui dépend d'un seul paramètre e, que si les constantes A et B vérifient une relation (condition nécessaire).

Si l'on change u en $-u$, x ne change pas et le polynome $\varphi(x)$ reprend la même valeur; pour qu'il puisse représenter la fonction $A\cos 5u + B\sin 5u$, dont le second terme, s'il existe, change de signe en même temps que u, il faut donc que B soit nul.

Cette fonction est alors $A\cos 5u$; si l'on change u en $\pi - u$, x ne fait que changer de signe et le polynome $\varphi(x)$, dont tous les termes sont de degré impair, ne fait que changer de signe; comme on a également

$$A\cos[5(\pi - u)] = -A\cos 5u,$$

l'identification de $f(x)$ avec $\varphi(x)$ a des chances de réussir.

Si l'on admet que $\cos 5u$ s'exprime en fonction de $\cos u$ par un polynome entier, ce polynome doit satisfaire à l'équation différentielle (3), c'est un polynome $\varphi(x)$; comme l'hypothèse $u = 0$ donne alors

$$x = \cos 0 = 1, \qquad y = \cos 0 = 1,$$

le polynome $\varphi(x)$ doit prendre la valeur 1 pour $x = 1$, ce qui donne $e = 1$. On a ainsi

$$(5) \qquad \cos 5u = 16\cos^5 u - 20\cos^3 u + 5\cos u;$$

on peut vérifier ce résultat par la formule de Moivre.

4° L'équation différentielle (3) est satisfaite par

$$y = A\cos 5u + B\sin 5u.$$

Comme on l'a dit au début, l'idée du problème est d'obtenir $\cos 5u$ en fonction de $\cos u$ par l'équation différentielle (3), sans employer la formule de Moivre ; on ne doit pas évaluer $\sin 5u$ par cette formule ([1]). On doit écrire

$$\sin^2 5u = 1 - \cos^2 5u = (1 - \cos 5u)(1 + \cos 5u),$$

et l'on a facilement, avec $e = 1$ dans $\varphi(x)$,

$$(6) \qquad 1 - \cos 5u = 1 - \varphi(x) = (1 - x)(4x^2 + 2x - 1)^2,$$

$$(7) \qquad 1 + \cos 5u = 1 + \varphi(x) = (1 + x)(4x^3 - 2x - 1)^2;$$

on a donc cette solution de l'équation différentielle

$$(8) \qquad y = A\,\varphi(x) \pm B(4x^2 + 2x - 1)\sqrt{1 - x} \times (4x^2 - 2x - 1)\sqrt{1 + x}.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}(4x^2 + 2x - 1)(4x^2 - 2x - 1) &= (4x^2 - 1)^2 - 4x^2,\\ &= 16x^4 - 12x^2 + 1,\\ &= \frac{1}{5}\varphi'(x),\end{aligned}$$

et l'on peut écrire

$$(9) \qquad y = A\,\varphi(x) \pm \frac{B}{5}\varphi'(x)\sqrt{1 - x^2}.$$

On pouvait plus simplement, ayant obtenu

$$\cos 5u = \varphi(x),$$

en déduire par dérivation

$$\sin 5u = \frac{1}{5}\varphi'(x)\sqrt{1 - x^2}.$$

([1]) On pourrait, dans la formule (5), ehanger u en $\frac{\pi}{2} - u$, ce qui donnerait

$$\begin{aligned}\sin 5u &= \sin u(16\sin^4 u - 20\sin^2 u + 5)\\ &= \pm\sqrt{1 - x^2} \times (16x^4 - 12x^2 + 1)\\ &= \pm\sqrt{1 - x^2}(4x^2 + 2x - 1)(4x^2 - 2x - 1);\end{aligned}$$

mais cela ne donne pas le groupement $(1 - x)(4x^2 + 2x - 1)^2$, ...

Remarque. — On a rencontré la formule

$$(10)\qquad 1 - \cos 5u = (1 - \cos u)(4\cos^2 u + 2\cos u - 1)^2;$$

il est facile d'en rendre compte. Si l'on annule le premier membre, on a, à $2k\pi$ près,

$$u = 0, \qquad u = \frac{2\pi}{5}, \qquad u = \frac{4\pi}{5}, \qquad \ldots;$$

sur le cercle trigonométrique, les extrémités de ces arcs sont les sommets d'un pentagone régulier qui a un sommet en A, qui est, par conséquent, symétrique par rapport au diamètre AA'. Les cosinus de ces arcs ont donc, en dehors de la valeur 1, quatre valeurs égales deux à deux; les deux valeurs sont

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \qquad \cos\frac{4\pi}{5},$$

ou

$$\sin\frac{\pi}{5}, \qquad -\sin\frac{3\pi}{5},$$

et ces valeurs sont les racines de l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

qui se déduit de l'équation

$$X^2 + X - 1 = 0,$$

relative à l'inscription des décagones réguliers dans le cercle.

On voit d'ailleurs directement que les quantités $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $-\cos\frac{4\pi}{5}$, qui sont les apothèmes OM et ON du pentagone étoilé et du pentagone convexe, sont les moitiés des côtés PE et QD du décagone convexe et du décagone étoilé, dans un cercle de rayon 1.

Les deux membres de la formule (10) sont donc égaux à un facteur existant près; comme ils sont égaux pour $u = \frac{\pi}{2}$, ils sont réellement égaux.

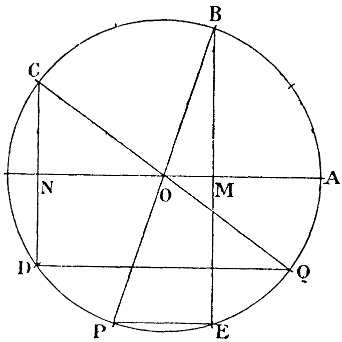
La présence d'un facteur carré au second membre de la formule (10) est liée à la première des deux formules

$$1 - \cos 5u = 2 \sin^2 5 \frac{u}{2},$$

$$1 - \cos u \quad = 2 \sin^2 \frac{u}{2};$$

si l'on pose

$$\sin \frac{u}{2} = z,$$



cette formule (10) peut se déduire de la formule

$$\sin 5 \frac{u}{2} = z(16z^4 - 20z^2 + 5)$$

donnée dans la note ([1]) : on élève au carré, on multiplie par 2, on remplace $2 \sin^2 5 \frac{u}{2}$ par $1 - \cos 5u$ et $2z^2$ par $1 - \cos u$; le trinome bicarré en z est remplacé par un trinome du second degré en $\cos u$.