

M.-F. EGAN

**Note sur les courbes planes de genre un**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 14  
(1914), p. 369-371

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1914\\_4\\_14\\_\\_369\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__369_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M' 4b]

## NOTE SUR LES COURBES PLANES DE GENRE UN;

PAR M. M.-F. EGAN,

Soit une courbe  $C$  de degré  $n$  et de genre 1. Considérons les courbes adjointes  $\Phi$  de degré  $n - 2$ , passant par les points doubles de  $C$  (qu'on peut supposer distincts l'un de l'autre) et par  $n - 2$  points  $Q$  pris sur  $C$ . Les courbes  $\Phi$  dépendent linéairement d'un paramètre  $\lambda$ ; soit

$$\Phi = f - \lambda g = 0$$

leur équation. Chacune d'elles rencontre la courbe  $C$  en deux points  $\omega$  variables avec  $\lambda$ . Nous dirons qu'une courbe  $\Phi$  est tangente à  $C$  lorsque ces deux points se confondent.

Il ressort de la théorie classique des courbes de genre 1 que quatre des courbes  $\Phi$  sont tangentes à  $C$ ; que le rapport anharmonique  $R$  des paramètres  $\lambda$  de ces quatre courbes est indépendant de la façon dont on a choisi les points  $Q$ ; que  $R$  est un invariant pour toute transformation birationnelle de  $C$ ; enfin, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe  $C$  soit transformable en  $C'$  est qu'on ait  $R = R'$ .

Dans le cas des cubiques,  $R$  est le rapport anharmonique des quatre tangentes issues d'un point de la courbe.

L'objet de cette Note est d'indiquer une démonstration très simple de ces propositions.

On peut exprimer les coordonnées d'un point de  $C$  par des fonctions elliptiques d'une variable  $u$ . Alors la

fonction  $\lambda(u) = f(x, y) : g(x, y)$  est du second ordre. En effet, la courbe  $\Phi_0 = f - \lambda_0 g = 0$  rencontre C en deux points en dehors des points fixes, donc l'équation  $\lambda(u) = \lambda_0$  admet deux solutions dans un parallélogramme des périodes. Supposons qu'on ait choisi pour  $g$  l'une des courbes  $\Phi$  qui sont tangentes à C; soit  $u_0$  l'affixe de son point de contact. Alors  $\lambda(u)$  admet  $u_0$  comme pôle double; on a donc

$$\lambda(u) = A p(u - u_0) + B.$$

Les valeurs de  $u$  autres que  $u_0$ , répondant aux points de contact de C avec celles des courbes  $\Phi$  qui lui sont tangentes, sont visiblement les zéros de  $\lambda'(u)$ , c'est-à-dire  $u_0 + \omega_1$ ,  $u_0 + \omega_2$ ,  $u_0 + \omega_3$ . Les valeurs de  $\lambda$  répondant aux quatre courbes  $\Phi$  tangentes à C sont donc

$$\infty, A e_1 + B, A e_2 + B, A e_3 + B;$$

d'où

$$R = (\infty, e_1, e_2, e_3).$$

On voit que R garde sa valeur, soit qu'on fasse varier les points Q, soit qu'on soumette C à une transformation birationnelle. Il s'ensuit aussi que la condition  $R = R'$  est nécessaire pour que C puisse se transformer en C'.

Pour montrer que cette condition est suffisante, on remarque que la valeur de R détermine celle de l'invariant absolu  $g_2^3 : g_3^2$ . Or, en mettant  $u = h\nu$ , on a

$$h^2 p(u; g_2, g_3) = p(\nu; h^4 g_2, h^6 g_3).$$

On peut donc considérer  $g_2$  et  $g_3$  comme déterminés lorsque  $g_2^3 : g_3^2$  l'est. Donc, lorsque  $R = R'$ , on peut exprimer les coordonnées des points de C et de C' par des fonctions elliptiques ayant les mêmes invariants. Cela posé, on peut transformer soit C, soit C' en la

( 371

cubique

$$x = p(u; g_2, g_3), \quad y = p' u,$$

ce qui achève la démonstration.