

BERTRAND GAMBIER

**Relation d'Euler entre le cercle circonscrit
à un triangle et les cercles tangents aux
trois côtés de ce triangle**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14
(1914), p. 366-368

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__366_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K' 2b]

**RELATION D'EULER ENTRE LE CERCLE CIRCONSCRIT A UN
TRIANGLE ET LES CERCLES TANGENTS AUX TROIS COTÉS
DE CE TRIANGLE;**

PAR M. BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

Je considère le triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O et rayon R; j'appelle I, I', I'', I''' les centres des cercles inscrit et exinscrits. La bissectrice AII' perce le cercle O en D et l'on a DB = DC = DI = DI'; la bissectrice AI''I''' perce le cercle O en D' et l'on a D'B = D'C = D'I'' = D'I'''.

D'un point P de AII' comme centre, je décris le cercle de rayon PQ = r tangent aux deux côtés de l'angle A; soit OP = d. Les triangles semblables APQ, DD'C donnent

$$\frac{r}{DC} = \frac{AP}{2R} \quad \text{ou} \quad 2Rr = AP \cdot DC.$$

En prenant un sens positif sur AD nous écrirons

$$(1) \quad \begin{cases} 2Rr = AP \cdot ID = AP \cdot DI', \\ d^2 - R^2 = PA \cdot PD; \end{cases}$$

d'où, par addition et soustraction,

$$(2) \quad \begin{cases} d^2 - R^2 + 2Rr = AP \cdot ID + AP \cdot DP = AP \cdot IP, \\ d^2 - R^2 - 2Rr = AP \cdot I'D + AP \cdot DP = AP \cdot I'P. \end{cases}$$

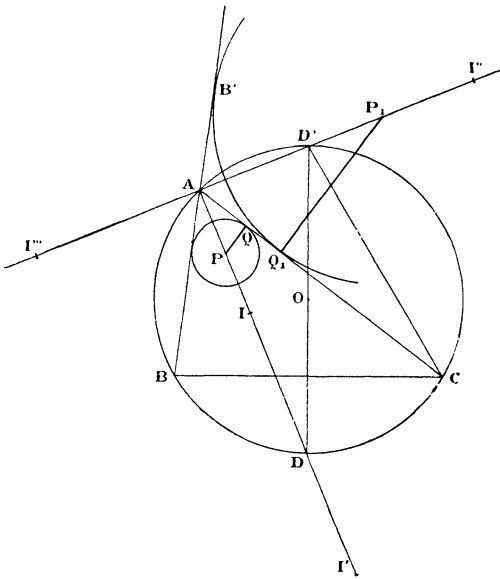
La démonstration est indépendante de la position de P sur AD : si P coïncide avec I, on a

$$(3) \quad d^2 = R^2 - 2Rr;$$

si P coïncide avec I',

$$(4) \quad d^2 = R^2 + 2Rr.$$

Ce sont les relations dites d'Euler.



Si l'on prend un point P_1 sur la demi-droite AI'' , on a de même, en posant encore $P_1Q_1 = r$, $OP_1 = d$,

$$(5) \quad \begin{cases} 2Rr = AP_1 \cdot D'I'' = AP_1 \cdot I'''D, \\ d^2 - R^2 = P_1D' \cdot P_1A; \end{cases}$$

d'où

$$(6) \quad \begin{cases} d^2 - R^2 - 2rR = AP_1(I''D' + D'P_1) = AP_1 \cdot I''P_1, \\ d^2 - R^2 + 2rR = AP_1(I'''D' + D'P_1) = AP_1 \cdot I'''P_1. \end{cases}$$

· En nous servant des relations (2) ou (6) nous démontrons aisément les réciproques : si deux cercles de centre O et P satisfont à la relation (3) ou à la relation (4), un point quelconque du cercle O est le sommet d'un triangle inscrit dans le cercle O, et qui admet pour cercle inscrit ou exinscrit le cercle P.

En effet, supposons vérifiée la relation (3) : on en déduit $R > 2r$, $d < R - r$; donc le cercle P est tout entier intérieur au cercle O : d'un point A du cercle O je mène les tangentes au cercle P, elles coupent le cercle O de nouveau en B et C; la première relation (2) devient $AP \cdot IP = 0$, donc P coïncide avec I.

Supposons au contraire vérifiée la relation (4) : elle entraîne $R < d < R + r$. On voit aisément que si $d < 3R$, les deux cercles sont sécants, tandis que si $d > 3R$, le cercle P contient le cercle O tout entier à son intérieur; nous nous bornerons donc au cas $d < 3R$.

Je prends un point A sur la portion du cercle O extérieure au cercle P et je recommence la même construction : si le cercle P est inscrit dans l'angle BAC, la seconde relation (2) me donne $I'P = 0$; si le cercle P est inscrit dans l'un des angles adjacents à BAC, dans l'angle B'AC, par exemple, je me sers de la première relation (6) qui me donne $I''P = 0$; de toute façon, P coïncide avec le centre de l'un des cercles exinscrits au triangle ABC.
