

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14 (1914), p. 34-48

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__34_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Partie analytique. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1) \quad \sin t \frac{dy}{dt} + 3 \cos t y = 3;$$

déterminer la solution de cette équation qui prend la valeur $\frac{3\pi}{4}$ pour $t = \frac{\pi}{4}$.

2° Dans l'équation différentielle (I), faire le changement de variable défini par la relation

$$(II) \quad x = \sin^2 \frac{t}{2}$$

et montrer que l'équation transformée [équation (II)] admet une solution de la forme

$$y = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + \dots$$

les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ étant des constantes. Déterminer ces coefficients et le rayon de convergence de la série.

Vérifier que, si l'on différentie l'équation (II), on obtient une équation du second ordre

$$(III) \quad 2x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-10x) \frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

3° Dans l'équation (III) faire successivement le changement de fonction inconnue et le changement de variable définis par les relations

$$y = x^{-\frac{3}{2}} z, \\ x = 1 - x_1.$$

Montrer que l'équation différentielle ainsi obtenue admet une solution de la forme

$$z = x_1^n,$$

n étant un exposant constant convenablement déterminé.

II. Partie géométrique. — On appelle s l'arc d'une courbe (C); \dot{x}, y, z les coordonnées, par rapport à un trièdre trirectangle donné $Oxyz$, d'un point courant M de la courbe (C); α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente en M, dans le sens des arcs croissants; $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, les cosinus directeurs de la normale principale et de la binormale; R et T les rayons de courbure et de torsion (R essentiellement positif, T positif ou négatif donné par les relations $\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T} \dots$).

Si l'on a la relation $R = T$ on a aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha'' &= A, & A\alpha + B\beta + C\gamma &= 1, \\ \beta - \beta'' &= B, & A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' &= -1, \\ \gamma - \gamma'' &= C, \end{aligned}$$

A, B, C étant des constantes liées par la relation

$$A^2 + B^2 + C^2 = 2.$$

Déduire de là que la courbe est une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices ont pour paramètres directeurs A, B, C.

En choisissant convenablement l'axe Oz, on pourra supposer

$$\begin{aligned} A = B = 0, & \quad C = \sqrt{2}, \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \gamma'' &= \frac{-1}{\sqrt{2}}, \\ \alpha' &= \beta\sqrt{2}, & \beta' &= -\alpha\sqrt{2}, & \gamma' &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on donne, outre $R = T$, la relation $R = s$, on achèvera la détermination de la courbe (C) en posant

$$\alpha = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}},$$

et l'on exprimera successivement s , x , y et z au moyen de la variable φ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit la courbe

$$\begin{aligned} x &= 6t + 6t^2 + 2t^3, \\ y &= 2 + 2t^3, \\ z &= -3 - 6t, \end{aligned}$$

l'arc de la courbe s'exprime rationnellement en t par la formule

$$ds = 6\sqrt{2}(1 + t + t^2) dt.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de l'indicatrice des courbures s'expriment aussi rationnellement en

(37)

L'arc σ de cette indicatrice s'obtient par la formule

$$d\sigma = \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

Calculer les cosinus directeurs α, β, γ de la tangente, les cosinus directeurs α', β', γ' de la normale principale, le rayon de courbure.

Vérifier la relation

$$\alpha + \beta - \gamma = \sqrt{2}.$$

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Partie analytique. — On donne le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} - yk \cos \theta = f(t),$$

$$\frac{dy}{dt} + k(x \cos \theta - z \sin \theta) = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} + yk \sin \theta = 0,$$

où k et θ désignent des constantes et $f(t)$ une fonction connue de t .

1° On suppose d'abord $f(t) \equiv 0$.

Le système admet une solution pour laquelle la fonction y est identiquement nulle : quelle est cette solution ?

Trouver les trois solutions des équations sans second membre telles que, pour $t = 0$, on ait :

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -1, \quad z_1 = 0 \quad (1^{\text{re}} \text{ solution}),$$

$$x_2 = \cos \theta, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = -\sin \theta \quad (2^{\text{e}} \text{ solution}),$$

$$x_3 = \sin \theta, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = \cos \theta \quad (3^{\text{e}} \text{ solution}).$$

2° On suppose que $f(t)$ n'est pas identiquement nulle.

Indiquer les quadratures à effectuer pour obtenir une solution particulière du système donné.

Effectuer les calculs en supposant :

$$(\alpha) \quad f(t) = -\frac{ak}{\cos \theta} \quad (a \text{ constant}).$$

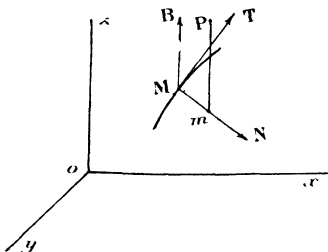
$$(\beta) \quad f(t) = -a e^{ht} \quad (a \text{ et } h \text{ constants}).$$

Partie géométrique. — On donne, en axes rectangulaires, l'expression des coordonnées x, y, z d'un point quelconque M d'une courbe C en fonction de l'arc s de cette courbe; MT est la tangente dans le sens des arcs s croissants, MN la normale principale orientée de M vers le centre de courbure, MB la binormale orientée, de sorte que le trièdre $MTNB$ ait même disposition que le trièdre de coordonnées $Oxyz$.

Dans le plan normal en M à la courbe C on mène une parallèle à la binormale, définie par la valeur l du segment Mm , m désignant le point où elle perce MN . On suppose que l est une fonction connue de s , de sorte que cette parallèle engendre une surface réglée Σ . On définit un point P de la génératrice par le segment $mP = u$.

1^o Équation par rapport aux axes $Oxyz$ du plan tangent à Σ en P .

2^o Il suffira de supposer que le trièdre $Oxyz$ coïncide



avec le trièdre de Serret relatif au point particulier M pour déduire de ce qui précède l'équation du même plan tangent par rapport au trièdre $MTNB$, qui est

$$\left(l + \frac{u}{T}\right) X - \left(1 - \frac{l}{R}\right) (Y - l) = 0,$$

R et T désignant le rayon de courbure et le rayon de torsion, l' étant la dérivée de l , $\frac{dl}{ds}$.

3^o Quelle fonction de s faut-il prendre pour l , pour que la surface Σ soit développable ?

Plan tangent à la surface développable, arête de rebroussement de cette surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1^o Intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1) \quad \frac{px}{x^2 + y^2} + \frac{qy}{x^2 - 3y^2} = 0.$$

Vérifier, par un calcul direct, que l'équation (1) et l'équation

$$(2) \quad px + qy = z$$

admettent comme solution commune

$$(3) \quad z = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 y}.$$

2^o On considère la surface (S) qui, rapportée à trois axes rectangulaires, est représentée par l'équation (3) et le solide (Σ) limité par la surface (S) et par les plans

$$z = 0, \quad z = c \quad (c > 0).$$

Calculer :

L'aire de la section de (Σ) par le plan $z = z_1$;

Le volume de Σ ;

Le moment d'inertie, par rapport à Oz, du solide (Σ) supposé homogène. (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Partie analytique. — 1^o Intégrer l'équation différentielle de Lagrange

$$(1) \quad x + py = a\sqrt{p^2 + 1},$$

où a désigne une constante et $p = \frac{dy}{dx}$.

Exprimer les coordonnées x et y d'un point variable d'une courbe intégrale quelconque (γ) en fonction de l'angle α , tel que $\tan \alpha = p$.

2^o Former l'équation différentielle (2) des trajectoires orthogonales des courbes (γ). Intégrer cette équation (2) et trouver son intégrale singulière.

3^o L'équation différentielle (1) peut se mettre sous la

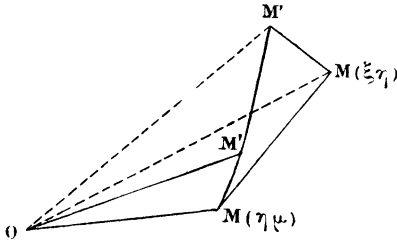
(40)

forme

$$r dr = a ds,$$

ds étant un arc infiniment petit d'une courbe (γ) et r le rayon vecteur de l'origine de l'arc ds .

Vérifier que, si l'on fait tourner une courbe (γ) dans le



plan (xOy) autour du point O on obtient une nouvelle courbe intégrale.

4^o Former l'équation différentielle des courbes (γ) en coordonnées polaires et intégrer cette équation en prenant pour variable l'angle V tel que $\cos V = \frac{a}{r}$.

II. Partie géométrique. — Sur une courbe plane (C) on fixe un sens positif arbitraire pour les arcs croissants et l'on appelle α l'angle de la direction positive Or avec la tangente menée dans le sens des arcs s croissants.

On prend pour expression algébrique du rayon de courbure le nombre ≥ 0 ,

$$R = \frac{ds}{d\alpha};$$

pour expression algébrique de la distance de l'origine à la tangente, le nombre ≥ 0 ,

$$p = x \sin \alpha = y \cos \alpha.$$

1^o On vérifie immédiatement que

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha) d\alpha = d(x \sin \alpha - y \cos \alpha).$$

(41)

En déduire la formule

$$R = \frac{r dr}{dp},$$

en posant

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

2° On sait que l'aire élémentaire OMM' comprise entre le rayon vecteur OM, l'arc MM' et OM' a pour valeur

$$dA = \frac{1}{2}(x dy - y dx).$$

Sur chaque tangente on porte, dans le sens positif, une longueur constante a : soit μ le point correspondant à M; μ décrit une courbe (γ) et a pour coordonnées ξ, η .

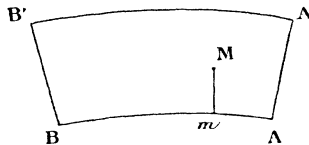
Vérifier que l'élément d'aire dB , analogue à dA , relatif à la courbe (γ) , a pour expression

$$dB = dA - \frac{a}{r} dp + \frac{a^2}{r^3} d\sigma.$$

3° On suppose la courbe (C) ovale et fermée; il en est de même de (γ) ; l'aire comprise entre (C) et (γ) a pour valeur πa^2 .

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère un arc de courbe AB de longueur (S) ne présentant pas d'inflexion. Sur chaque normale on porte, du côté opposé à la développée, une longueur constante L. On définit ainsi un quadrilatère curviligne ABA'B'.

Un point quelconque M de cette aire peut être défini



par la longueur s de l'arc Am et la distance $Mm = l$, m désignant le pied de la normale abaissée de M sur l'arc AB.

Les courbes $s = \text{const.}$, $l = \text{const.}$ forment un réseau orthogonal.

1° Évaluer la longueur de la courbe $l = \text{const.}$; vérifier qu'elle est égale à $S + lV$, V désignant l'angle des normales extrêmes.

2° Évaluer l'aire du rectangle infiniment petit compris entre les courbes (l) , $(l + dl)$, s , $(s + ds)$; l'aire infiniment petite comprise entre la courbe (l) et la courbe $(l + dl)$; l'aire infiniment petite comprise entre la courbe (s) et la courbe $(s + ds)$.

3° Aire du quadrilatère $ABA'B'$.

Vérifier les formules obtenues en supposant que l'arc AB est un arc de circonférence. (Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Trouver une solution du système d'équations différentielles

$$(1) \quad \begin{cases} x dy - y dx = \frac{x dx + y dy}{k} = (x^2 + y^2) dt \\ dz = k z dt \end{cases} \quad (k \text{ constant}),$$

telle que, pour $t = 0$, on ait

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = c.$$

Les formules ainsi obtenues définissent une courbe (C) . Les axes étant rectangulaires, calculer, en fonction du paramètre t , l'arc s de la courbe (C) ; les cosinus directeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de la tangente; les dérivées $\frac{d\alpha_1}{ds}, \frac{d\alpha_2}{ds}, \frac{d\alpha_3}{ds}$; le rayon de courbure, les cosinus directeurs de la normale principale, l'angle de la binormale avec Oz , le rayon de torsion pour un point variable de (C) .

2° On donne le système d'équations différentielles

$$(2) \quad \begin{cases} s \frac{d\alpha}{ds} - m\beta = 0 \\ s \frac{d\beta}{ds} + m\alpha + n\gamma = 0 \\ s \frac{d\gamma}{ds} - n\beta = 0 \end{cases} \quad (m \text{ et } n \text{ constants}).$$

Former l'équation différentielle qui définit β en fonction de s . Faire dans cette équation le changement de variable

$$ds = ks dt \quad \left(\frac{1}{k^2} = m^2 + n^2 \right).$$

Trouver les intégrales $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ de l'équation différentielle ainsi obtenue, telles que, pour $t = 0$, on ait

$$\begin{aligned} \beta_1 = 0, & \quad \beta_2 = 1, & \quad \beta_3 = 0, \\ \frac{d\beta_1}{dt} = -1, & \quad \frac{d\beta_2}{dt} = 0, & \quad \frac{d\beta_3}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Calculer les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de t , qui correspondent à ces intégrales $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, et qui, pour $t = 0$, prennent les valeurs

$$\alpha_1 = mk, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \sqrt{1 - m^2 k^2}.$$

Calculer x, y, z en fonction de t par les formules

$$x = \int \alpha_1 ds, \quad y = \int \alpha_2 ds, \quad z = \int \alpha_3 ds.$$

Les formules ainsi obtenues définissent une courbe (C'). Vérifier que le système donné (2) représente les formules de Serret et Frenet pour la courbe (C').

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz , on considère la surface (S) définie par les formules

$$(S) \quad \begin{cases} x = a \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta}, \\ y = a \frac{z}{c} \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}, \end{cases}$$

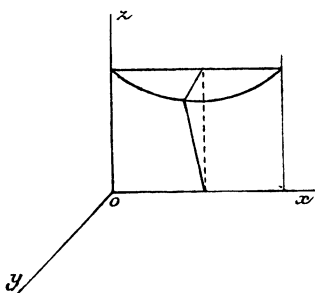
où a et c désignent des constantes, et θ un paramètre qui varie de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$.

1° Montrer que le lieu des points de (S) pour lesquels θ a une valeur constante est une droite, que la surface (S) est un conoïde d'axe Ox et que la section de (S) par le plan $z = c$ est une lemniscate.

2° Calculer l'aire A de la section de (S) par un

plan $z = \text{const.}$ et l'aire A_1 de la section de (S) par un plan $x = \text{const.}$

3° Soit (T) le solide homogène limité par la surface (S)



et par les plans $z = 0, z = c$. Calculer le moment d'inertie de (T) :

(α) par rapport au plan xOy :

(β) par rapport au plan yOz :

(γ) par rapport à l'axe Oy .

(Juin 1913.)

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° En faisant usage du développement en série de $\cot \frac{x-a}{2}$ suivant les puissances de e^{ix} , calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} x \cot \frac{x-a}{2} dx$$

où l'on a

$$a = \alpha + i\beta.$$

2° Montrer qu'on peut calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) x dx.$$

où R désigne une fonction rationnelle quelconque.

II. 1° *L'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \quad z + f(x, \beta) = 0,$$

où l'on a posé

$$x = px + qy, \quad \beta = py - qx,$$

a toujours des solutions communes avec une équation

$$(2) \quad F\left(\frac{p}{q}, x, y\right) = \text{const.}$$

dont le premier membre est une fraction du premier degré en $\frac{p}{q}$; déterminer ces solutions communes en formant, puis intégrant l'équation (2). En conclure l'intégrale générale de (1).

2° Condition que doit remplir la fonction $f(x, \beta)$ pour que les caractéristiques de (1) soient lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales. Exemples simples.

(Novembre 1909.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad p^2 + q^2 = f^2(x, y).$$

a. Quelles sont sur chaque surface intégrale : 1° les courbes trajectoires orthogonales des caractéristiques; 2° les courbes conjuguées des caractéristiques.

Dans quels cas ces deux systèmes de courbes coïncident-ils?

(Interpréter géométriquement la condition trouvée.)

b. Intégrer l'équation dans le cas où l'on a

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

c. Indiquer comment il faudrait choisir $f(x, y)$ pour qu'il existe une équation

$$(2) \quad a(x, y)p + b(x, y)q = \text{const.}$$

linéaire en p et q et possédant en commun avec l'équation

(46)

donnée (1) une solution z dépendant d'une nouvelle constante.

II. Quelles sont les diverses déterminations de l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{(z-\alpha)\sqrt{1-z^2}}$$

quand on ne précise pas le chemin qui conduit du point 0 au point z dans le plan complexe ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer par la théorie des résidus l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(at+b) dt}{(t^2+t+1)^3},$$

où a et b sont deux paramètres réels arbitraires.

Retrouver le résultat par l'emploi de l'intégrale indéfinie (décomposition en fractions simples).

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère les surfaces S dont l'équation en coordonnées cartésiennes rectangulaires est

$$zx^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \text{const.},$$

m désignant un entier positif et φ une fonction arbitraire :

1° Déterminer, autant qu'on le peut en laissant φ arbitraire, leurs trajectoires orthogonales.

2° Peut-on grouper une simple infinité de ces courbes de manière à engendrer des cônes ayant pour sommet l'origine des coordonnées ? Trouver ces cônes.

3° Comment se déterminent les lignes asymptotiques des surfaces S .

II. L'angle solide sous lequel on voit d'un point P de coordonnées (a, b, c) une portion de surface S , entièrement limitée par une courbe Γ , ne dépend que de la courbe. On demande de l'exprimer par une intégrale curviligne étendue à cette courbe Γ .

(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soient

$$X = aZ + \alpha,$$

$$Y = bZ + \beta$$

les équations d'une droite en coordonnées cartésiennes rectangulaires.

1° Montrer qu'il existe pour tous les complexes

$$(1) \quad \beta = \alpha f(a, b) + g(a, b),$$

quelles que soient les fonctions arbitraires f et g , des surfaces développables dont les normales appartiennent au complexe.

2° Comment pourrait-on déterminer ces surfaces développables ?

3° Trouver les surfaces développables dont les normales appartiennent au complexe

$$(2) \quad \frac{\alpha\beta - b\alpha + 1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \text{const.}$$

4° Trouver toutes les surfaces (S) dont les normales appartiennent au complexe précédent.

[On transformera, à défaut d'autre méthode, l'équation aux dérivées partielles des surfaces (S) en introduisant au lieu des coordonnées cartésiennes (x, y) les coordonnées polaires (ρ, ω) .]

5° Montrer que ces surfaces (S) sont égales aux surfaces qui leur sont parallèles.

Que peut-on en conclure relativement à leurs lignes de courbure ?

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère la famille de surfaces représentée en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation

$$zx^m = a \varphi \left(\frac{y}{x} \right),$$

où φ est une fonction donnée et a une constante arbitraire :

1° Montrer que les lignes asymptotiques de ces surfaces peuvent s'obtenir par une quadrature.

2° Montrer que les trajectoires orthogonales de ces surfaces s'obtiennent aussi par une quadrature. (On établira d'abord que ces trajectoires sont placées sur des surfaces de révolution autour de Oz .)

3° Déterminer la fonction φ de manière que z satisfasse à l'équation aux dérivées partielles

$$(p^2 + q^2)x^2 = z^2$$

et intégrer cette équation.

II. Exposer sommairement quelles sont les diverses déterminations de l'intégrale

$$\int_{z_0}^z \left(\frac{\Lambda}{z - a} + \frac{z + b}{\sqrt{1 - z^2}} \right) dz$$

suivant le chemin adopté pour aller, dans le plan complexe, du point z_0 au point z .

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la surface de révolution représentée par les équations

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad z = f(\rho),$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un point M de la surface.

Quelles courbes C doit décrire le point M pour que l'arc décrit par sa projection m sur le plan xOy soit égal à $a d\omega$.

Former explicitement les deux expressions dont la quadrature donnerait :

1° Les trajectoires orthogonales des courbes C , sur la surface de révolution ;

2° L'arc de l'une de ces trajectoires, compté à partir du point où elle rencontre xOy .

Exécuter ces quadratures dans l'hypothèse

$$z^2 + \rho^2 = a^2.$$

(Juillet 1912.)

