Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 334-335

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__334_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2202.

(1913, p. 96)

Soient A, B, C, D *quatre sommets d'un parallélépipède, tels que deux quelconques d'entre eux soient les sommets opposés d'une même face du polyèdre. Soient* G_a *un cône du second ordre inscrit dans le trièdre formé par les trois faces qui se coupent en* A; G_b, G_c *et* G_d *les cônes parallèles à* G_a *ayant leurs sommets respectifs en* B, C, D.

Démontrer que les quatre cônes passent par un même point.

Thié.

SOLUTION.

Par M. R. B.

Prenons comme tétraèdre de référence ABCD, et soit

$$(1) \qquad x + y + z + t = 0$$

l'équation du plan de l'infini.

Les faces du parallélépipède qui se coupent en A sont les plans menés par AB, AC et AD parallèlement aux arêtes CD, DB et BC respectivement. Elles ont pour équations

$$z + t = 0, \qquad t + y = 0, \qquad y + z = 0.$$

L'équation d'un cône G_a inscrit à ce trièdre peut s'écrire

$$(2) \qquad \pm\sqrt{a(z+t)} \pm \sqrt{b(t+y)} \pm \sqrt{c(y+z)} = 0.$$

On forme immédiatement l'équation du cône G_b en remplaçant dans l'équation (2) $t+y$ par $-(x+z)$ et $y+z$ par $-(x+t)$, ce qui donne

$$(3) \qquad \pm\sqrt{a(z+t)} \pm \sqrt{-b(x+z)} \pm \sqrt{-c(x+t)} = 0.$$

En effet, cette équation est bien celle d'un cône ayant son sommet en B et ayant la même conique à l'infini que le cône G_a, à cause de l'équation (1).

On formera de même les équations des cônes G_c et G_d :

$$(4) \qquad \pm\sqrt{-a(x-y)} \pm \sqrt{b(t+y)} \pm \sqrt{-c(x+t)} = 0,$$

$$(5) \qquad \pm\sqrt{-a(x+y)} \pm \sqrt{-b(x+z)} \pm \sqrt{c(y+z)} = 0.$$

Dans les équations (2), (3) (4) et (5), les signes radieaux sont arbitraires. On peut les choisir de manière à mettre en évidence le fait que les quatre cônes ont un point commun. On prendra par exemple les formes

$$\begin{aligned}
\sqrt{a(z+t)} + \sqrt{b(t+y)} + \sqrt{c(y+z)} &= 0,\\
-\sqrt{a(z+t)} + \sqrt{-b(x+z)} + \sqrt{-c(x+t)} &= 0,\\
\sqrt{-a(x+y)} - \sqrt{b(t+y)} - \sqrt{-c(x+t)} &= 0,\\
-\sqrt{-a(x+y)} - \sqrt{-b(x+z)} - \sqrt{c(y+z)} &= 0.
\end{aligned}$$

En ajoutant ces équations membre à membre, on obtient une identité, ce qui établit la proposition énoncée.

Remarque. — On peut supposer que les quatre cônes G_a, G_b, G_c, G_d sont de révolution. Si M est leur point commun, ils sont tangents à un même cône de révolution, de sommet M et parallèle à chacun d'eux.

Si l'on coupe la figure par un plan P, perpendiculaire aux axes des cônes de révolution G_a, G_b, etc., il est facile de voir qu'on est conduit au théorème suivant :

Soient α, β, γ *les trois côtés d'un triangle* et α', β', γ' *les côtés d'un second triangle respectivement parallèles à ceux du premier. Les cercles inscrits dans les quatre triangles* $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta'\gamma')$, $(\alpha'\beta\gamma')$, $(\alpha'\beta'\gamma)$ *sont tangents à un même cercle.*

J'ai démontré autrement ce théorème (dont on précise l'énoncé en introduisant la considération des demi-droites et des cycles), dans un article des *Nouvelles Annales* (4[e] série, t. VII, 1907, p. 491). *Voir* aussi, dans le même recueil, un article de M. M. Fouché (4[e] série. t. VIII, 1908, p 116).

Autre solution de M. T. Ono.