

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14 (1914), p. 325-332

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__325_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = \cos 2x + x^2 e^{2x}.$$

2° *Déterminer la solution y de cette équation telle que, si x est infiniment petit principal, y soit un infiniment petit du troisième ordre. Quelle est alors la partie principale des infiniment petits y , $1 - \cos y$, $\arcsin y$, $y - \arcsin y$?*

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires OX, OY, OZ :*

1° *Montrer que les surfaces ayant pour équation*

$$\lambda^2(x^2 + y^2) - R^2[x^2 + y^2 + (z - \lambda)^2] = 0,$$

où R désigne une longueur constante donnée et λ un paramètre arbitraire, sont des cônes de révolution autour de OZ.

2° *Chercher l'enveloppe des génératrices de ces cônes situées dans le plan XOZ. En déduire la surface enveloppe de ces cônes.*

3° *Considérant, parmi les trajectoires orthogonales des génératrices précédentes, celles qui passent par un point donné (quelconque) du plan XOZ, dire à l'aide de quelle construction géométrique on peut obtenir les centres de courbure en ce point des trajectoires considérées.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *En désignant par OX, OY deux axes rectangulaires, et par x , y les mesures de l'abscisse et de l'ordonnée d'un point en centimètres, construire la courbe*

$$y = 10 e^{-x^2} \sin 2x.$$

Déterminer en particulier, à 1^{mm} près, la valeur de la première ordonnée maxima à droite de OY.

2° *A partir de quelle valeur absolue de x la valeur absolue de l'ordonnée y reste-t-elle constamment inférieure à $\frac{1}{10}$ de millimètre?*

3° Calculer, d'une façon approchée, l'aire comprise entre OX et l'arc de courbe qui va du point O jusqu'au premier point de rencontre avec OX à droite de O. Indiquer l'approximation obtenue.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Étudier la convergence de la série

$$1 + 3x^3 + 6x^6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} x^{3n-3} + \dots$$

2° Vérifier que dans l'intervalle de convergence la somme $y(x)$ de cette série vérifie la relation différentielle

$$(1 - x^3)y' - 9x^2y = 0.$$

Déduire de là une expression de la fonction $y(x)$ qui la définisse pour toutes les valeurs de x .

3° Calculer $Y = \int_0^x x^2 y dx$, et développer cette fonction Y en série entière suivant les puissances de x .

II. 1° Étant donnés deux axes rectangulaires OX, OY, on propose de déterminer dans le plan XOY la courbe la plus générale satisfaisant à la condition suivante : si l'on désigne par M un point quelconque de la courbe, par C le centre de courbure de la courbe en M, et par N le point d'intersection de la normale en M avec OX, le point N doit être le milieu de la distance MC. Faire voir que cette courbe est une cycloïde engendrée par un cercle de rayon arbitraire roulant sans glissement sur OX, et à laquelle on a imprimé, parallèlement à OX, une translation arbitraire.

2° Assujettissant désormais la courbe à passer par le point O, considérant, parmi ses points d'intersection avec la partie positive de OX, celui qui est à la plus petite distance de O, et désignant par A le point dont il s'agit, on propose de déterminer le centre de gravité de l'arc OA.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Les trois axes OX, OY, OZ étant rectangulaires, on considère l'ellipsoïde de révolution dont les trois demi-axes, respectivement dirigés suivant OX, OY, OZ, ont pour longueurs

$$OA = OB = 1^m, \quad OC = 2^m.$$

1° Déterminer à 1^{cm} près le volume limité par l'ellipsoïde, le plan XOY, et le plan parallèle à XOY de cote 75^{cm}.

2° Déterminer à 1^{cm} près la cote d'un plan P parallèle à XOY, tel que le volume compris entre le plan XOY, le plan P et l'ellipsoïde soit égal à 2^m³.

NOTA. — On donne $\pi = 3,1415926535\dots$; on prendra dans les calculs le nombre de décimales utiles.

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Intégrer l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' - 3ay' + 2a^2y = (bx + 1)e^{bx},$$

où a et b désignent des constantes données.

On exprimera l'intégrale générale dans les quatre cas suivants :

$$(\alpha) \quad a \neq 0, \quad b \neq a, \quad b \neq 2a;$$

$$(\beta) \quad a \neq 0, \quad b = a;$$

$$(\gamma) \quad a \neq 0, \quad b = 2a;$$

$$(\delta) \quad a = 0.$$

2° Dans le cas

$$a \neq 0, \quad b = a,$$

déterminer l'intégrale particulière de l'équation différentielle (1) qui s'annule ainsi que sa dérivée pour $x = -\frac{2}{a}$.

Quelle est, lorsqu'on fait varier a , l'enveloppe de la courbe intégrale correspondante ?

3° Pour $b = a = 1$, la courbe intégrale particulière spécifiée dans 2° est

$$y = -\frac{e^x}{2}(x+2)^2.$$

Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe OY et l'axe OX.

II. Étant donnés deux axes rectangulaires OX, OY, on considère les deux paraboles

$$(P) \quad y^2 - 2px = 0,$$

$$(Q) \quad x^2 - 2qy = 0.$$

Sur (P) on prend un point M de coordonnées x, y ; la

tangente en M à (P) rencontre la parabole (Q) en deux points N, N' .

1° Former l'équation dont les racines sont les abscisses des points N et N' , et calculer les coordonnées X, Y du point I , milieu de NN' , en fonctions de y , ordonnée de M .

2° Construire la courbe C , lieu du point I

3° Montrer que cette courbe C est tangente à la parabole (P) en un point A dont on calculera les coordonnées.

Calculer le rapport des rayons de courbure de la courbe C et de la parabole (P) au point A .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étant donnés deux axes rectangulaires OX, OY , sur lesquels les abscisses x et les ordonnées y sont mesurées en centimètres :

1° Construire la courbe

$$y = xL(1 + x^2)$$

(L désigne le logarithme népérien. On donne $L.10 = 2,3026$).

On calculera à l'aide des Tables de logarithmes les ordonnées des points d'abscisses 1, 2, 3, et les coefficients angulaires des tangentes en ces points.

2° Calculer avec trois décimales exactes, à l'aide du développement de y en une série entière par rapport à x , les ordonnées des points ayant respectivement pour abscisses

$$0,25; 0,5; 0,75.$$

3° Calculer avec deux décimales exactes l'abscisse du point ayant pour ordonnée 1. (Juin 1913.)

Clermont-Ferrand.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Soient deux axes rectangulaires Oxy . On donne sur Ox les points A et B tels que $\overline{OA} = l$, $\overline{BA} = nl$ ($l > 0$). On décrit les cercles Γ et C qui passent par A et ont pour centres respectifs les points O et B . On fait rouler, sans glissement, C sur Γ de manière que la vitesse angulaire du centre O' soit égale à 1, l'origine des temps étant l'instant où ce centre est en B . Calculer, en fonction de t , les coordonnées du point M de C qui se trouvait en A à l'origine des temps.

2° Construire le centre de courbure en M de cette trajectoire.

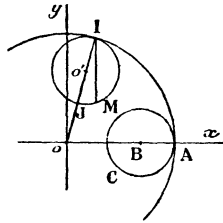


Fig. 1.

toire. Montrer qu'il divise MI dans un rapport constant, I désignant le point de contact de C et Γ .

3° Construire les vecteurs vitesse et accélération du point M. On montrera que le vecteur accélération se trouve sur la droite symétrique de MO par rapport à MI.

4° Trouver les équations de la tangente et de la normale sous la forme canonique. En déduire que la développée se déduit de la trajectoire par une homothétie de centre O, suivie d'une rotation autour de O. (Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère la parabole d'équation polaire $r = \frac{1}{1 \pm \cos \theta}$. On prend son sommet A pour origine des arcs, la demi-tangente positive en ce point ayant pour angle polaire $+\frac{\pi}{2}$.

1° Calculer, en fonction de θ , l'arc $AM = s$, l'angle polaire de la demi-tangente positive MT, l'aire du secteur AOM et le rayon de courbure en M. On vérifiera que la perpendiculaire en O à OM coupe le rayon de courbure en son milieu.

2° Un point matériel, de masse 1, est assujéti à décrire la parabole sans frottement. Il est, en outre, attiré par O suivant la force $\frac{1}{r^2}$. On le lance de A, dans le sens positif, avec la vitesse v_0 . Déterminer et décrire le mouvement. Calculer la réaction en fonction de θ . Vérifier que, si v_0 est convenablement choisie, cette réaction est constamment nulle. Expliquer ce résultat. (Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soient trois axes rectangu-

laires $Oxyz$ et le point A de Oz qui a pour cote 1. Sur OA comme diamètre, on décrit un cercle (C) dans le plan yOz .

Soit d'autre part D la première bissectrice de \widehat{xOx} .

1° On prend un point P sur (C) tel que l'angle de Oy avec OP soit égal à φ . On le joint au point Q de D qui a même cote. On obtient une droite Δ , dont on demande les équations. Trouver l'équation de la surface (S) qu'elle engendre quand P décrit (C) .

2° On oriente Δ de P vers Q . Désignant par M un point quelconque de Δ , on pose $\overline{PM} = \rho$. Calculer les coordonnées de M en fonction de ρ et φ .

3° Ligne de striction de (S) et paramètre de distribution relatif à Δ .

4° Construire la section de (S) par le plan $x = \frac{3}{8}$.

5° Le point M , supposé de masse 1, est attiré par O suivant une force égale à OM . On l'abandonne de P sans vitesse initiale. Calculer ρ en fonction du temps. Calculer la réaction.

Trouver les positions d'équilibre et l'équation polaire du lieu de leurs projections sur xOy . Construire ce lieu.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = x - y - t - 2, \quad \frac{dy}{dt} = y + t.$$

Déterminer une solution telle que $x = 0, y = 0$ pour $t = 0$. Construire la courbe obtenue.

Déterminer : 1° l'aire comprise entre la courbe Ox et la droite $x = 1$; 2° l'aire comprise entre la courbe et la droite $x = 1$.

Trouver les coordonnées des points d'inflexion à $0,01$ près.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. La droite $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$, où p désigne une certaine fonction de φ , enveloppe une courbe (C) . Soient M le point de contact, N le point de rencontre de la normale avec Ox , P la projection de l'origine sur la tangente.

1° Déterminer la fonction p pour que l'on ait constam-

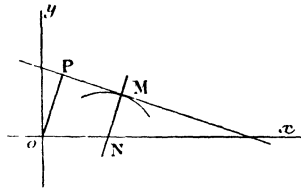
ment

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{PO}} = 1 - n,$$

n désignant une constante donnée.

2° Montrer que pour une certaine valeur de n les courbes (C) [ainsi obtenues sont telles que le rayon de

Fig. 1.

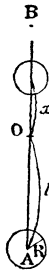


courbure en M soit fonction linéaire de p . Parmi les courbes parallèles à (C), il y en a alors une dont le rayon de courbure est triple de la normale limitée à Ox .

3° Construire une des courbes (C) trouvées dans (2°) et calculer sa longueur totale.

II. Une tige homogène, d'épaisseur négligeable, de masse m , de longueur $2l$, peut tourner autour d'un axe horizontal O , qui lui est perpendiculaire en son milieu. A une extrémité A est fixée une sphère homogène, de

Fig. 2.



rayon R , de masse M et de centre A . Le long de OB peut glisser une sphère identique à la première et dont on fixe le centre à une distance quelconque x de O . On obtient de la sorte un pendule composé dont on demande la durée

d'oscillation. Variations de cette durée quand x croît de 0 à 1. Calculer la longueur du pendule simple synchrone, en négligeant les rapports $\frac{m}{M}$ et $\frac{R}{l}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer les équations*

$$y' \pm y = A e^x + B e^{-x} + C \cos(x + \alpha) + x^3.$$

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soient un trièdre trirectangle $Oxyz$ et le point A de Ox qui a pour abscisse $+1$. On considère le cylindre (C) , qui admet pour section droite le cercle décrit dans xOy sur OA comme diamètre, et le cône de révolution (C') , qui a pour sommet A , dont l'axe de révolution est parallèle à Oz et dont l'angle au sommet vaut un droit. Ces deux surfaces se coupent suivant une ligne (Γ) .*

1° *Calculer les coordonnées d'un point quelconque M de cette ligne en fonction de l'angle polaire φ de sa projection sur xOy .*

2° *Trouver les équations des projections de (Γ) sur les plans de coordonnées et construire ces projections.*

3° *Trouver l'équation du conoïde droit qui a pour axe Oz et dont les génératrices s'appuient sur (Γ) . Prouver que les plans qui passent par Ox coupent ce conoïde suivant des ellipses. Lieux des sommets et des foyers de ces ellipses.*

4° *Montrer que (Γ) est une sphère (Σ) de centre O et calculer l'aire de la surface qui limite le volume commun à (C) et (Σ) .*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver une solution de l'équation différentielle*

$$y'' + \frac{2}{a} y' + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) y = 0,$$

telle que $y = h, y' = 0$, pour $x = 0$.

Construire la courbe qui représente cette fonction.

Déterminer les points où la tangente est parallèle à Ox , et le rayon de courbure en ces points. (Juin 1913.)