NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. CLAPIER

Concours d'agrégation de 1913. Solution de la question d'analyse

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 26-34

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__26_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1913. SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

Par M. C. CLAPIER.

SUJET.

Les axes ox, oy, oz étant rectangulaires, on donne un cylindre de révolution (C) *ayant pour axe la droite oz et pour rayon a.*

Soient u et v deux paramètres angulaires déterminant les plans tangents au cylindre (C) *menés par un point* M *de l'espace.*

Le point M *décrivant une surface, sa coordonnée z sera une fonction de u et v, soit $z = a.f(u, v)$, définissant cette surface.*

On mène, par le point M, *dans le plan tangent en* M *à la surface, les deux tangentes au cylindre* (C), *soient* MT *et* MT'.

1° *Former l'équation aux dérivées partielles, soit* (E), *à laquelle doit satisfaire la fonction $f(u, v)$, pour que les deux directions* MT *et* MT' *soient conjuguées sur la surface correspondante, soit* (S).

Quelle propriété ont les deux familles de courbes, $u =$ const., $v =$ const., *sur la surface* (S)?

2° *Montrer qu'on peut trouver plusieurs expressions linéaires de la forme*

$$\varphi(u, v) = \mathrm{A}(u, v)\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \mathrm{B}(u, v)\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \mathrm{C}.f, \qquad \mathrm{C} = \text{const.}$$

telles que l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u.\partial v} = 0$$

admette toutes les solutions de l'équation du second ordre (E).

Déterminer, en utilisant ce résultat, toutes les solutions de l'équation (E).

3° *Les solutions de l'équation* (E) *dépendent de deux fonctions arbitraires, l'une de* u, *l'autre de* v.

Montrer que les surfaces (S) *particulières obtenues en annulant successivement l'une ou l'autre de ces fonctions arbitraires sont développables. Les arêtes de rebroussement de ces développables sont-elles arbitraires sur la surface qui les porte ?*

Représenter la solution générale $f(u, v)$, *ou la surface* (S) *générale, à l'aide de ces arêtes de rebroussement, et indiquer une génération de la surface.*

SOLUTION.

1. La projection m du point M sur le plan Oxy est déterminée par les deux tangentes

$$(1) \qquad \begin{cases} x \cos u + y \sin u = a, \\ x \cos v + y \sin v = a. \end{cases}$$

On peut en déduire x et y à l'aide des deux paramètres angulaires u et v, de sorte que la surface (S) lieu du point M peut être définie par les expressions des coordonnées

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a \dfrac{\cos \dfrac{u+v}{2}}{\cos \dfrac{u-v}{2}}, \\[2ex] y = a \dfrac{\sin \dfrac{u+v}{2}}{\cos \dfrac{u-v}{2}}, \\[2ex] z = af(u, v). \end{cases}$$

Les plans mMT et mM′T′ sont tangents au cylindre et coupent la surface (S) suivant deux courbes passant en M et dont les tangentes en ce point sont conjuguées par rapport à la surface.

On peut donc dire que les deux familles de courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, sont conjuguées sur la surface (S). Les coordonnées x, y et z de celle-ci devront donc satisfaire à une même équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} = \alpha \frac{\partial t}{\partial u} + \beta \frac{\partial t}{\partial v}. \tag{3}$$

Les deux premières expressions (2) vont nous permettre de déterminer α et β. Nous en déduisons

$$\left\{ \begin{aligned} dx &= \frac{-a}{2\cos^2 \frac{u-v}{2}} (\sin v\, du + \sin u\, dv), \\ dy &= \frac{a}{2\cos^2 \frac{u-v}{2}} (\cos v\, du + \cos u\, dv); \end{aligned} \right. \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-a \sin v}{2\cos^2 \frac{u-v}{2}} \right) = -\frac{a}{2} \frac{\cos \frac{u+v}{2}}{\cos^3 \frac{u-v}{2}} = \frac{-x}{2\cos^2 \frac{u-v}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{-y}{2\cos^2 \frac{u-v}{2}}.$$

Substituant x et y au lieu de f dans l'équation (3), nous obtenons

$$\alpha \sin v + \beta \sin u = \frac{x}{a},$$

$$\alpha \cos v + \beta \cos u = \frac{-y}{a};$$

d'où, en tenant compte des égalités (1), on déduit

$$\alpha \sin(v - u) = 1, \qquad \beta \sin(u - v) = 1.$$

Et l'équation aux dérivées partielles cherchée est

$$\text{(E)} \qquad \sin(u-v)\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial t}{\partial u}-\frac{\partial t}{\partial v}=0.$$

Les courbes $u=$ const., $v=$ const., font partie d'une même série constituée par les sections de la surface (S) par les plans tangents au cylindre. Soit M_1 le point de rencontre de l'une d'elles avec la génératrice correspondante du cylindre ; la tangente en ce point est conjuguée par rapport à elle-même, c'est-à-dire asymptotique.

2. On peut intégrer l'équation (E), en remarquant que les coordonnées x et y du point m peuvent s'obtenir par projections, sur les axes du contour Otm et se mettre sous la forme

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= (\cos u+\lambda \sin u)a \\ y &= (\sin u-\lambda \cos u)a \end{aligned}\right. \qquad \left(\lambda=\operatorname{tang}\frac{u-v}{2}\right).$$

Chacun des seconds membres est tel que si l'on pose

$$(5') \qquad z=[F(u)-\lambda F'(u)]a,$$

F étant une fonction arbitraire de u, les expressions (5) se déduisent de (5′) en prenant successivement :

$$F(u)=\cos u \qquad \text{et} \qquad F(u)=\sin u.$$

x, y et z vérifiant l'équation (E), on est donc conduit à poser

$$f(u,v)=F(u)-\lambda F'(u),$$

qui nous donne en effet une solution de cette équation avec une fonction arbitraire. Comme l'intégrale générale dépend de deux fonctions arbitraires, elle aura la forme

$$F(u)+F_1(v)-\lambda F'(u)+\lambda F'_1(v). \tag{6}$$

Nous allons la retrouver en cherchant les expressions

$$\varphi(u, v)=A(u, v)\frac{\partial t}{\partial u}+B(u, v)\frac{\partial t}{\partial v}+Cf,$$

telles que l'équation $\frac{\partial\theta}{\partial u\,\partial v}=0$ admette toutes les solutions de l'équation (E) :

Si l'on remplace θ par x et y successivement, nous devrons avoir

$$A(u, v)\frac{\partial\theta}{\partial u}+B(u, v)\frac{\partial\theta}{\partial v}+C.\theta=\Phi_1(u)+\Phi_2(v),$$

Φ_1 et Φ_2 étant deux fonctions arbitraires.

Des expressions (2) et (4) on déduit, pour les premiers membres :

$$\frac{A\sin v+B\sin u-2C\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}}{\cos^2\frac{u-v}{2}}$$

et

$$\frac{A\cos v+B\cos u+2C\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}}{\cos^2\frac{u-v}{2}}.$$

La manière la plus simple de satisfaire à la condition demandée est de les égaler à zéro, ce qui donne

$$\begin{aligned} A\sin v+B\sin u &= C(\cos u+\cos v),\\ A\cos v+B\cos u &= -C(\sin u+\sin v),\end{aligned}$$

d'où

$$-A=B=C\cot\frac{u-v}{2}. \tag{7}$$

Pour montrer que ces valeurs conviennent, nous allons essayer de déterminer $A(u, v)$, $B(u, v)$ et C, de manière qu'on ait

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v}+Cz\right)=0,$$

z satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles trouvée,

$$\sin(u-v)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0. \tag{8}$$

Or, en effectuant les calculs et remplaçant $\frac{\partial^3 z}{\partial u^2\,\partial v}$ et $\frac{\partial^3 z}{\partial u\,\partial v^2}$ par leurs valeurs déduites par différentiation de (8), on trouve

$$\begin{aligned}
&A\left(\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{\sin(u-v)}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)\\
&+B\left(-\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{\sin(u-v)}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\\
&+C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\left(\frac{\partial A}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\\
&+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial B}{\partial u\,\partial v}=0.
\end{aligned}$$

Et pour que cette équation soit identique à l'équation (8), il faudra que A et B satisfassent aux conditions

$$\frac{-A}{\sin(u-v)}+\frac{\partial A}{\partial v}=0, \qquad \frac{B}{\sin(u-v)}+\frac{\partial B}{\partial u}=0.$$

On déduit

$$A=-c_1\cot\frac{u-v}{2}, \qquad B=c_2\cot\frac{u-v}{2},$$

c_1 et c_2 étant des constantes que nous déterminerons de manière à rendre l'identification complète; nous retrouvons ainsi la condition (7).

Ainsi, les solutions de l'équation (E) satisfont à l'équation linéaire du premier ordre,

$$(9) \qquad \cot\frac{u-v}{2}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+z=\Phi_1(u)+\Phi_2(v).$$

Les équations des caractéristiques nous donnent

$$\frac{u+v}{2}=\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{du}{-\cot(u-\alpha)}=\frac{dz}{-z+\Phi_1+\Phi_2}.$$

Supposons $\Phi_2=0$ et posons $\Phi_1=F+F''$.

L'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{dz}{du}=(z-F-F'')\operatorname{tang}(u-\alpha);$$

c'est une équation différentielle linéaire qui s'intègre en posant

$$z=\frac{c}{\cos(u-\alpha)},$$

$$c=-\int(F+F'')\sin(u-\alpha)\,du=F\cos(u-\alpha)-F'\sin(u-\alpha).$$

On en déduit, pour la partie de l'intégrale correspondante à $\Phi_2(v)=0$,

$$z=F(u)-\lambda F'(u).$$

Et l'intégrale générale de (E) a bien la forme

$$(10) \qquad f(u,v)=F(u)-\lambda F'(u)+F_1(v)+\lambda F_1'(v).$$

3. Les solutions de l'équation (E) dépendent des deux fonctions arbitraires $F(u)$ et $F_1(v)$. Si nous annulons la seconde, $F_1'(v)$ est aussi nul et il reste les surfaces particulières représentées par les équations (5) et (5'). On peut les écrire

$$(11) \qquad \frac{x-a\cos u}{\sin u}=\frac{y-a\sin u}{-\cos u}=\frac{z-aF(u)}{-F'(u)}=a\lambda.$$

Sous cette forme, elles représentent les tangentes à la courbe tracée sur le cylindre et déterminée par

$$(\mathrm{R}) \qquad \begin{cases} x = a\cos u, \\ y = a\sin u, \\ z = a\mathrm{F}(u). \end{cases}$$

Nous avons donc des surfaces développables dont les arêtes de rebroussement sont des courbes gauches quelconques portées sur le cylindre.

Nous pouvons écrire les équations de la surface générale (S) sous la forme

$$x = \frac{a}{2}[\cos u + \lambda\sin u + \cos v - \lambda\sin v],$$

$$y = \frac{a}{2}[\sin u - \lambda\cos u + \sin v + \lambda\cos v],$$

$$z = \frac{a}{2}[\mathrm{F}(u) - \lambda\mathrm{F}'(u) + \mathrm{F}_1(v) + \lambda\mathrm{F}'_1(v)],$$

qui nous donne une représentation de la surface à l'aide des deux arêtes de rebroussement (R) et (R_1),

$$z = a\mathrm{F}(u) \qquad \text{et} \qquad z = a\mathrm{F}_1(v).$$

Si l'on prend deux points M_1 et M_2 se correspondant sur les deux développables, on aura

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

M, milieu de $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$, décrit la surface (S).

Remarque. — On aurait pu obtenir l'équation (E) par la méthode de M. Jamet, qui consiste à introduire les coordonnées homogènes (cf. *Nouvelles Annales*, 1913, p. 388).

Si l'on pose

$$\alpha = \operatorname{tang}\frac{u}{2}, \quad \beta = \operatorname{tang}\frac{v}{2},$$

on est conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$(12) \qquad (\alpha - \beta)\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0.$$

Si, pour revenir aux coordonnées cartésiennes, nous posons

$$\theta = (1 + \alpha\beta) f,$$

on retrouve, après le changement de variables (α, β) en (u, v), l'équation (E)

$$\sin(u - v)\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial t}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial v}.$$

M. Jamet trouve, comme intégrale de l'équation (12),

$$\begin{aligned}\theta = 2\varphi(\alpha) + (\beta - \alpha)\varphi'(\alpha) \\ + 2\varphi_1(\beta) + (\alpha - \beta)\varphi'_1(\beta) + a(\alpha + \beta) + b.\end{aligned}$$

Il serait intéressant d'en déduire l'intégrale de (E),

$$z = F(u) - \operatorname{tang}\frac{u - v}{2} \cdot F'(u) + F_1(v) + \operatorname{tang}\frac{u - v}{2} \cdot F'_1(v).$$