Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 239-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__239_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1966.

(1903, p. 143)

Soit a un nombre positif donné; on pose

$$u_0 = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}}, \qquad u_1 = \frac{u_0}{(1-u_0)^2}, \qquad \ldots,$$
$$u_n = \frac{u_0}{(1-u_{n-1})^a}, \qquad \ldots.$$

Démontrer que pour n infini

$$\lim u_n = \frac{1}{a+1}.$$

MAILLARD.

SOLUTION

Par M. R. CARDELOPPI.

1° On a, quel que soit n,

$$(1) \qquad 0 < u_n < \frac{1}{a+1}.$$

En effet, cette double inégalité est vérifiée pour $n=0$; supposé qu'elle le soit jusqu'à une certaine valeur de n, établissons-la pour la valeur immédiatement supérieure. On a

$$u_{n+1} = \frac{u_0}{(1-u_n)^a}.$$

Comme u_n est <1 d'après (1) on voit d'abord que u_{n+1} est positif. Il faut ensuite démontrer que l'on a

$$\frac{u_0}{(1-u_n)^a} = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}} \frac{1}{(1-u_n)^a} < \frac{1}{a+1}$$

ou

$$\frac{a}{a+1} < 1 - u_n,$$

ce qui résulte de la deuxième inégalité (1).

2° On voit encore, par récurrence, que

$$u_{n+1} > u_n;$$

en effet, cette inégalité peut s'écrire

$$\frac{u_0}{(1-u_n)^a} > \frac{u_0}{(1-u_{n-1})^a},$$

ou

$$u_n > u_{n-1}.$$

D'autre part, elle est vérifiée pour $n=0$; donc, etc.

3° La suite des u étant, d'après ce qui précède, bornée et croissante, u_n tend vers une limite λ que l'on déterminera en écrivant qu'elle satisfait à l'équation

$$\lambda = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}} \frac{1}{(1-\lambda)^a},$$

ou

$$\lambda(1-\lambda)^a = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}},$$

qui admet la racine (double) $\lambda = \frac{1}{a+1}$ dans l'intervalle de 0 à 1 et n'en admet pas d'autre. La proposition énoncée est donc bien établie.