Concours d'admission à l'École polytechnique en 1913

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 235-239
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__235_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1913.

I.

Composition d'Algèbre et Trigonométrie.

On considère la fonction θ *de* x *définie par la relation*

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1+\theta x^2},$$

où le premier membre représente un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ *et* $+\frac{\pi}{2}$.

1° *Déterminer les valeurs limites de* θ *pour* $x = \pm\infty$ *et* $x = 0$.

2° *Suivre ces variations de la fonction $\theta(x)$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$.*

3° *Dans cette fonction $\theta(x)$, on remplace x par n^p, n étant un entier variable et p un nombre positif donné; on considère la série dont le terme de rang n a pour valeur $\theta(n^p)$. Pour quelles valeurs de p la série est-elle convergente?*

4° *Calculer*

$$\int_a^\infty \frac{x}{1+x^2}\theta(x)\,dx.$$

Étudier la variation de cette intégrale quand a augmente de $-\infty$ à $+\infty$.

5° *Calculer, à l'approximation de la règle à calcul, la valeur numérique de*

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^\infty \frac{x}{1+x^2}\theta(x)dx.$$

SOLUTION PAR M. THIÉ.

1° On a

$$\theta = \frac{x - \operatorname{arc\,tang} x}{x^2 \operatorname{arc\,tang} x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{arc\,tang} x} - \frac{1}{x}\right).$$

La seconde forme de θ montre que cette fonction prend la valeur o pour $x = \pm\infty$. Pour x tendant vers o, on a, par le développement en série de la première forme,

$$\theta = \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots}{x^3 - \frac{x^5}{3} + \dots}.$$

Donc, pour $x = 0$, θ prend la valeur $\frac{1}{3}$.

2° Comme la fonction θ est visiblement paire, il suffit de l'étudier pour $x > 0$. Calculons la dérivée de θ :

$$\theta' = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\text{arc tang } x} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\left[\frac{-1}{(\text{arc tang} x)^2}\,\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\right];$$

x étant positif, θ' a le signe de la quantité

$$u = x^3(\text{arc tang} x)^2\theta' = 2\,(\text{arc tang } x)^2 - x\,\text{arc tang} x - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Pour $x = 0$, u s'annule. Calculons la dérivée de cette fonction :

$$u' = 4\,\text{arc tang } x\,\frac{1}{1+x^2} - \text{arc tang } x - \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \text{arc tang } x\,\frac{3-x^2}{1+x^2} - \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Pour $x \geqq \sqrt{3}$, u' est négatif. Pour $x < \sqrt{3}$, u' a le signe de la quantité

$$V = \text{arc tang } x - \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)(3-x^2)}.$$

V s'annule encore pour $x = 0$. Calculons la dérivée

$$V' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2)(3-x^2)(3+3x^2) - x(3+x^2)(4x-4x^3)}{(1+x^2)^2(3-x^2)^2}.$$

Par un calcul sans difficulté, on trouve que cette expression se réduit à

$$V' = \frac{-8x^2}{(3-x^2)(1+x^2)^2},$$

V' est donc négatif pour $0 < x < \sqrt{3}$, et la fonction V est décroissante dans cet intervalle. Elle est donc négative. Par suite, la dérivée u' est négative pour toutes les valeurs positives de x. On conclut de même que la fonction u et par conséquent la dérivée θ' sont négatives. La fonction θ est décroissante.

En résumé, quand x varie de 0 à ∞, la fonction θ

décroît de $\frac{1}{3}$ à o ; c'est une fonction paire, et la courbe représentative se construirait sans difficulté.

3° On a

$$n^p\theta(n^p) = \frac{1}{\text{arc tang}\, n^p} - \frac{1}{n^p} = \frac{1}{\text{arc tang}\, n^p}\left(1 - \frac{\text{arc tang}\, n^p}{n^p}\right).$$

Cette expression tend vers $\frac{2}{\pi}$, quand n augmente indéfiniment. On en déduit immédiatement, par application d'un théorème classique, que la série considérée est convergente pour $p > 1$ et divergente pour $p \leqq 1$.

4° On a

$$\int_a^\infty \frac{x}{1+x^2}\theta(x)\,dx = \int_a^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{\text{arc tang}\, x} - \frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \int \frac{1}{1+x^2}\,\frac{1}{\text{arc tang}\, x}\,dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$
$$= \left\{ \text{L}\left|\frac{\text{arc tang}\, x\sqrt{1+x^2}}{x}\right| \right\}_a^\infty.$$

Pour $x = \infty$, la fonction obtenue prend la valeur $\text{L}\,\frac{\pi}{2}$. On a donc, en appelant $f(a)$ l'intégrale donnée,

$$f(a) = \text{L}\,\frac{\pi}{2} - \text{L}\,\frac{\text{arc tang}\, a\sqrt{1+a^2}}{a} = \text{L}\,\frac{\pi a}{2\,\text{arc tang}\, a\sqrt{1+a^2}}.$$

On a supprimé le signe de la valeur absolue après le symbole L, car la quantité

$$\frac{\pi a}{2\,\text{arc tang}\, a\sqrt{1+a^2}}$$

est toujours positive.

La fonction $f(a)$ est paire. Pour $a = 0$, elle prend la valeur $\text{L}\,\frac{\pi}{2}$. Pour $a = \infty$, elle prend la valeur o. Dans tout l'intervalle elle est décroissante. On a en effet

$$f'(a) = -\frac{a}{1+a^2}\theta(a) < 0.$$

La courbe représentative de cette fonction est donc analogue à celle de la fonction θ.

5° Il s'agit de calculer

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mathrm{L}\frac{\pi\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{2\,\text{arc tang}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}} = \mathrm{L}\left[\frac{1}{\dfrac{\pi}{4}\,\text{arc tang}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\right]$$

$$= \mathrm{L}\left[\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}\right] = \mathrm{L}\,\frac{3}{2}$$

$$= \frac{\log_{10}3 - \log_{10}2}{\log_{10}e} = \frac{0{,}477 - 0{,}301}{0{,}434} = \frac{0{,}176}{0{,}434} = 0{,}405.$$