Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 223-235
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__223_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Établir les formules qui donnent la vitesse et l'accélération d'un point dans un système de coordonnées curvilignes quelconque : les appliquer au cas du mouvement d'un point sur une surface de révolution, en prenant comme lignes de coordonnées sur cette surface les méridiens et les parallèles.*

II. *Un corps solide présentant un point fixe* O *est animé d'un mouvement à la Poinsot. Sur les trois axes principaux d'inertie relatifs au point* O, *on porte des segments*

$$\mathrm{O}a = \sqrt{\mathrm{A}}, \qquad \mathrm{O}b = \sqrt{\mathrm{B}}, \qquad \mathrm{O}c = \sqrt{\mathrm{C}},$$

A, B, C *étant les moments d'inertie correspondants. Soient* ω, α, β, γ *les projections orthogonales des points* O, a, b, c *sur un point perpendiculaire au moment cinétique résultant. Démontrer que la somme des aires balayées par* $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$, *dans le mouvement du solide, reste proportionnelle au temps.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Une sphère homogène* S, *de masse* m, *animée d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, de vitesse* v_0, *heurte à un certain instant, en un point* M, *un solide* S′ *immobile et de très grande masse. Déterminer l'état dynamique de la sphère après le choc, et la perte de force vive, en supposant que la masse* m *de* S *soit assez petite relativement à celle de* S′, *pour que ce dernier solide puisse encore être considéré comme immobile après le choc.*

II. *Forme d'équilibre d'un fil flexible, inextensible, non pesant, traversé par un courant uniforme et soumis à l'influence d'un pôle d'aimant. On donne les positions des extrémités du fil ainsi que sa longueur.*

Nota. — *Le pôle étant pris pour origine d'axes rectangulaires, l'élément* (dx, dy, dz) *du fil, issu du point* (x, y, z), *à la distance* r *du pôle, est soumis à une force* totale, *dont les composantes suivant les axes sont, en vertu de la loi de Laplace et d'Ampère,*

$$\mathrm{X} = \mu \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3}, \qquad \ldots,$$

μ *étant une constante donnée.*

(Novembre 1912.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un corps solide, homogène, pesant, de forme quelconque est tel que, aux deux points où une* *droite* D, *qui lui est invariablement liée, rencontrerait sa surface, ce corps se prolonge en deux tourillons dont les surfaces font partie d'un même cylindre de révolution de rayon* r, *ayant pour axe cette droite* D. *Le corps repose, au moyen de ces deux tourillons,* A *et* B, *sur deux coussinets fixes, faisant eux-mêmes partie d'un deuxième cylindre de révolution horizontal et de rayon* $R = 5r$. *On suppose le corps solide parfaitement rigide, et les coussinets assez solidement établis pour que, malgré la distance qui sépare l'un de l'autre les pieds des deux tourillons, distance qui est aussi sensiblement celle des deux coussinets, les deux cylindres se touchent toujours également le long d'une même génératrice de contact, c'est-à-dire que cela doit avoir lieu dans chaque coussinet, ces deux portions de génératrice faisant partie de la même génératrice prolongée idéalement à travers le corps. Au début du mouvement, cette génératrice de contact est une génératrice* quelconque *du cylindre fixe des coussinets, et la position du solide par rapport à cette génératrice est aussi quelconque; mais les vitesses initiales dont peuvent être animés les divers points du corps sont toutes dirigées dans un plan perpendiculaire à la direction commune des génératrices des cylindres. Enfin ces vitesses initiales et la nature des cylindres en contact sont telles que le cylindre des tourillons ne peut jamais que* rouler sans glisser *à l'intérieur du cylindre des coussinets. On demande d'établir la ou les équations différentielles du mouvement dans le cas le plus général et d'en déduire ensuite celles qui conviennent au cas des petits mouvements, qu'on étudiera spécialement.*

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *On considère une ellipse matérielle qui tourne d'un mouvement uniforme donné autour de son centre dans son plan supposé fixe, la position initiale du grand axe étant horizontale. Un point matériel pesant* M *est astreint à se mouvoir sans frottement sur l'ellipse, sa position et sa vitesse initiales étant d'ailleurs quelconques. Établir l'équation différentielle du mouvement.*

2° *Particulariser cette équation pour le cas où l'ellipse* *se réduit à une circonférence de cercle toujours mobile uniformément dans son plan autour de son centre. Dire si l'on ne pourrait pas, dans ce cas particulier, établir l'équation différentielle directement par une méthode plus simple (sans parler de mouvement relatif). Dire enfin ce à quoi se réduit la discussion du mouvement dans le même cas de la circonférence.*

3° *Toujours dans le cas de la circonférence mobile établir l'équation du mouvement du point en tenant compte du frottement.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point mobile* M *parcourt une cardioïde fixe avec une vitesse dont la grandeur croît proportionnellement à une puissance d'exposant entier* n *du temps. A l'instant initial, le mobile se trouve au point de rebroussement* O, *avec une vitesse nulle.*

1° *Déterminer l'hodographe du mouvement;*

2° *Calculer la grandeur du vecteur-accélération à un instant quelconque.*

(Novembre 1912.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Trouver le mouvement d'une sphère pesante et homogène sur un plan incliné dépoli dont le frottement est suffisant pour ne permettre qu'un roulement sans glissement.*

Déterminer, dans ce cas, la valeur minimum du frottement en fonction de l'inclinaison du plan sur l'horizon.

On négligera la résistance au roulement.

SOLUTION.

Soient, dans le plan incliné, un axe OX horizontal et un axe OY suivant la ligne de pente vers le haut.

On fait passer par le centre C de la sphère mobile trois axes de directions fixes, Cx et Cy parallèles à OX et à OY et le troisième Oz normal au plan incliné vers le haut.

Soient X, Y et N les composantes de la réaction du plan incliné; α et β l'abscisse et l'ordonnée du centre C; p, q, r les composantes de la rotation de la sphère; R le rayon.

Puisqu'il y a roulement, la vitesse du point de contact est nulle, ou encore ses composantes suivant Cx et Cy sont nulles. On a ainsi

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} + qR = 0,\\ &\frac{d\beta}{dt} - pR = 0.\end{aligned}\right.$$

M étant la masse de la sphère, le mouvement du centre de gravité est fourni par les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = X,\\ &M\frac{d^2\beta}{dt^2} = Y - Mg\sin\alpha,\end{aligned}\right.$$

et le mouvement autour du centre de gravité s'obtient en prenant les moments par rapport à Cx et Cy, ce qui donne

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{2}{5}MR^2\frac{dp}{dt} = -RY,\\ &\frac{2}{5}MR^2\frac{dq}{dt} = RX.\end{aligned}\right.$$

La combinaison des équations (2) et (3) donne

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{2}{5}R\frac{dq}{dt} = 0,\\ &\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{2}{5}R\frac{dp}{dt} = -g\sin\alpha.\end{aligned}\right.$$

Enfin, en vertu de (1), on a

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{5}{7}g\sin\alpha.$$

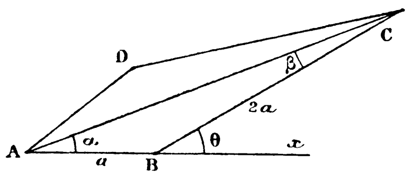
La trajectoire décrit une parabole, celle qui s'offrirait si l'on supprimait le frottement et si l'on reduisait la pesanteur aux $\frac{5}{7}$ de sa valeur.

Il n'y aura pas glissement si la réaction tangentielle du plan est inférieure à la réaction normale multipliée par f. Il faut donc qu'on ait

$$\frac{2}{7}Mg\sin\alpha < Mgf\cos\alpha, \qquad \text{ou} \qquad f > \frac{2}{7}\tan g\,\alpha,$$

ou encore que le coefficient de frottement soit supérieur à $\frac{2}{7}\tan g\alpha$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne un quadrilatère articulé* ABCD. *Les côtés* AB *et* AD *sont égaux. Les*



côtés CB *et* CD *sont aussi égaux, mais doubles des précédents.*

On fixe les points A *et* B *et l'on déplace le système dans son plan en faisant tourner la barre* AD *uniformément autour du point* A.

Déterminer à chaque instant la vitesse angulaire de la barre BC *et la représenter graphiquement en portant sur* BC *une longueur proportionnelle à cette vitesse angulaire.*

Sur l'axe autour duquel tourne BC *on cale un volant formé d'un disque circulaire homogène. Trouver quelle est à chaque instant la tension de la barre* BC? *On néglige les masses des barres.*

On suppose la longueur AB *égale à* 1^m, *le rayon du volant égal à* 2^m, *et le poids du volant égal à* 1000^{kg}. *Enfin la barre* AD *fait un tour par seconde.*

SOLUTION.

La vitesse angulaire ω de AD est

$$\omega = 2\frac{d\alpha}{dt}.$$

La vitesse angulaire ω' de BC est

$$\omega' = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}.$$

Mais on a

$$\sin\alpha = 2\sin\beta,$$

d'où

$$\cos\alpha \frac{d\alpha}{dt} = 2\cos\beta \frac{d\beta}{dt}.$$

On voit aussi facilement que l'on a

$$\cos\alpha = \frac{1+2\cos\theta}{\sqrt{5+4\cos\theta}} \qquad \text{et} \qquad \cos\beta = \frac{2+\cos\theta}{\sqrt{5+4\cos\theta}}.$$

On en conclut

$$\omega' = \frac{\omega}{2}\left(2 - \frac{3}{4+2\cos\theta}\right).$$

Si, sur BC, on porte BM $= \omega'$, le lieu de M sera la courbe représentative de la vitesse angulaire de BC. Cette courbe est la conchoïde de l'ellipse $\rho = \frac{-3\omega}{8+4\cos\theta}$, quand on augmente les rayons ρ de ω.

Soit T la tension de la barre DC, soit M la masse et soit R le rayon du volant. Le théorème des moments appliqué au volant donne

$$\frac{1}{2}MR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = T\,2a\sin 2\beta,$$

et, comme $R = 2a$ et que $\omega' = \frac{d\theta}{dt}$, on en tire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{4}\,\frac{6\sin\theta}{(4+2\cos\theta)^2}\,\frac{5+4\cos\theta}{(4+2\cos\theta)},$$

et, comme conséquence,

$$T = -\frac{3}{8}\frac{Ma\omega^2}{\cos^4\beta}.$$

Cette valeur de T convient quand θ varie de o à π; pour θ variant de π à 2π, il faut changer le signe parce que, dans ce cas, l'angle β ayant changé de sens, le moment de T est $-T\,2a\sin 2\beta$.

La plus petite valeur absolue de T est $\frac{3}{8}\cdot\frac{1000^{\text{kg}}}{g}\,\omega^2$. Mais $\omega = 2\pi$; on a donc

$$T = \frac{3}{2}\,1000^{\text{k}} = 1500^{\text{k}}.$$

On a alors

$$\beta = 0, \qquad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \pi.$$

La plus grande valeur absolue de T correspond à $\cos\beta$ maximum; ce qui arrive quand AD est sur le prolongement de AB. On a alors

$$\beta = 60^\circ, \qquad \cos\beta = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\cos^4\beta} = \frac{1}{16}.$$

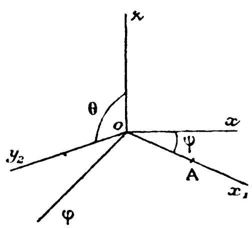
Le maximum est donc 16 fois plus grand que le minimum et atteint 24000^{kg}. (Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *Une plaque carrée pesante et homogène repose par un de ses côtés sur un plan horizontal. L'une des extrémités de ce côté est fixe et le côté peut tourner autour de cette extrémité et glisser sans frottement sur le plan horizontal.*

Primitivement, la plaque est sans vitesse, et elle est presque verticale. On l'abandonne à elle-même et l'on demande de quel angle aura tourné le côté qui glisse sur le plan horizontal lorsque la plaque sera devenue horizontale.

SOLUTION.

Soient trois axes fixes $oxyz$ et oz vertical, ox_1 et oy_1



deux côtés de la plaque, a la longueur d'un côté, ψ et θ les angles xox_1 et zoy_1.

Les coordonnées d'un point de la plaque sont

$$x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\theta \sin\psi,$$
$$y = x_1 \sin\psi + y_1 \sin\theta \cos\psi,$$
$$z = y_1 \cos\theta.$$

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à oz étant nulle, on a

$$0 = \Sigma m(xy' - yx') = \psi' \Sigma m(x_1^2 + y_1^2 \sin^2\theta) + \cos\theta\theta' \Sigma m x_1 y_1$$

ou

$$0 = \frac{1}{3}\psi'(1 + \sin^2\theta) + \frac{1}{4}\cos\theta\theta',$$

d'où

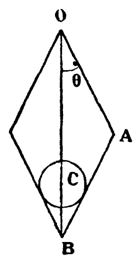
$$\psi = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\theta'}{1+\sin^2\theta} = -\frac{3}{4}(\text{arc tang} \sin\theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{16}\pi.$$

Épreuve pratique. — *Un losange articulé est formé de quatre barres identiques, pesantes et homogènes de longueur a. On le suspend par un de ses sommets à un point fixe, et l'on place, entre les deux barres inférieures, un disque circulaire homogène de rayon $\frac{a}{10}$ et de même poids que chacune des barres.*

Quelle est, dans la position d'équilibre, la distance du point fixe au centre du disque, et quelle est la réaction qu'exercent l'une sur l'autre les deux barres inférieures, si l'on suppose que le poids de l'une des barres est de 10^{kg}?

SOLUTION.

La distance z du centre de gravité *du système* au point O



est fournie par le théorème des moments

$$5z = \left(6\cos\theta - \frac{1}{10\sin\theta}\right)a.$$

Quand il y a équilibre, z est maximum et l'on a

$$60 \sin^3\theta - \cos\theta = 0.$$

En faisant $\tan\theta = x$, on a l'équation

$$60x^3 - x^2 - 1 = 0,$$

d'où

$$x = 0,26,$$

on en tire

$$OC = a\left(2\cos\theta - \frac{1}{10\sin\theta}\right) = 1,54a.$$

Ensuite, la réaction en B étant évidemment horizontale, on a, par rapport au point A et pour la tige AB, l'équation d'équilibre

$$X a \cos\theta = P\frac{a}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{P}{\sin\theta}\left(a - \frac{a}{10}\cot\theta\right),$$

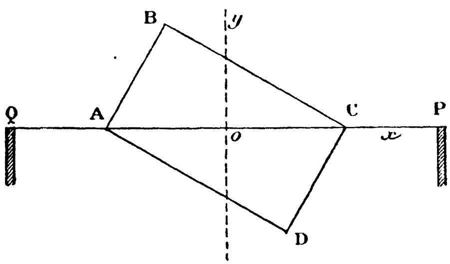
où X est la réaction en B et P le poids de la tige.

On tire de là

$$X = 1,51\,P = 15^{k},1.$$

(Octobre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque rectangulaire* ABCD *homogène de masse* M *est mobile sans frottement autour d'un axe* PQ, *de poids négligeable, qui coïncide avec la diagonale* AC *et dont les extrémités* P *et* Q *reposent sur*



deux appuis dépolis, situés dans un même plan horizontal.

Le milieu de l'axe PQ *est au centre* O *de la plaque.*

Le coefficient du frottement des extrémités P, Q *sur les appuis est égal à* $\tan 30°$.

La plaque est lancée avec une vitesse angulaire ω.

A quel nombre maximum de tours par seconde doit correspondre ω *pour que les points* P *et* Q *ne glissent pas sur leurs appuis?*

Lorsque ω *dépasse un peu sa valeur maximum, quel angle la plaque fait-elle avec le plan vertical lorsque le glissement se produit?*

Les côtés du rectangle sont $AB = 10^{cm}$ *et* $BC = 20^{cm}$. *La longueur de l'axe* PQ *est* 40^{cm}.

L'ellipsoïde d'inertie relatif au point O *coupe le plan de la plaque suivant une ellipse dont l'équation est, en prenant* PQ *pour axe des* x *et en prenant le centimètre pour unité*

$$\frac{5}{3}M(8x^2 + 12xy + 17y^2) = 1.$$

SOLUTION.

La plaque tourne évidemment d'un mouvement uniforme. Considérons un plan qui tournerait autour de Ox d'un mouvement uniforme avec la vitesse angulaire ω.

Par rapport à ce plan, la plaque serait en repos relatif.

Les conditions de cet équilibre relatif s'obtiendront en ajoutant, aux forces qui sollicitent la plaque, sur chaque point une force $m\omega^2 y$, dirigée parallèlement à Oy. Ces forces $m\omega^2 y$, qui sont parallèles, ont une somme $\Sigma m\omega^2 y$ qui est nulle. Elles se réduisent à un couple dont le moment est $\Sigma m\omega^2 xy = \omega^2 \Sigma mxy$.

La plaque est donc soumise à son poids et au couple $\Sigma m\omega^2 xy$. Mais Σmxy est égal à $-10M$. Si l'on donne à ce couple pour bras de levier PQ, il donnera en P et Q deux forces perpendiculaires à PQ situées dans le plan de la plaque et égales à $\omega^2 \frac{10M}{40} = \frac{5}{20} M\omega^2$.

Si la plaque fait un angle φ avec le plan vertical, ces forces auront une composante verticale égale à $\frac{5}{20} M\omega^2 \cos\varphi$ et une composante horizontale égale à $\frac{5}{20} M\omega^2 \sin\varphi$.

D'ailleurs le poids de la plaque donne en P et Q deux composantes verticales égales à $\frac{1}{2} Mg$.

On aura donc en P une force verticale égale à

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{M}g \pm \frac{5}{2}\,\mathrm{M}\omega^2\cos\varphi$$

et une force horizontale égale à

$$\frac{5}{2}\,\mathrm{M}\omega^2\sin\varphi.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut (en valeur absolue)

$$\frac{5}{20}\,\mathrm{M}\omega^2\sin\varphi < \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{M}g \pm \frac{5}{20}\,\mathrm{M}\omega^2\cos\varphi\right)\operatorname{tang}30^\circ,$$

$$\frac{5}{10}\,\omega^2\sin(\varphi \pm 30^\circ) < g\sin 30^\circ,$$

où φ peut varier de 0° à 360°; il faut donc que

$$\omega^2 < g.$$

Si n désigne le nombre de tours par seconde, on a $\omega = 2\pi n$; on a donc

$$40\pi^2 n^2 < 980 \qquad \text{ou} \qquad n25 \text{ environ} \qquad (n = \sqrt{24}).$$

Si n dépasse cette valeur très peu, l'inégalité cessera d'être vérifiée lorsque $\sin(\varphi \pm 30^\circ)$ sera maximum, c'est-à-dire pour $\varphi = 60^\circ$ ou 120°.

C'est-à-dire que le point Q glissera quand ABC fera avec la verticale supérieure un angle de 60°, et P glissera quand BDC fera, avec la verticale supérieure, un angle de 60°.

Épreuve pratique. — *On prend dans un plan six points fixes placés aux sommets d'un hexagone régulier. On les numérote* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *en parcourant le périmètre de l'hexagone dans un sens déterminé.*

A ces six points, on attache six fils de caoutchouc, qu'on numérote 1, 2, 3, 4, 5, 6; *les numéros des fils étant les numéros des sommets auxquels ils sont attachés.*

Ces fils sont de même nature, et leur longueur doublerait sous l'action d'une tension de 1000^{g}.

On réunit en un même point P *les extrémités qui n'ont pas encore été fixées.*

On demande de trouver approximativement la tension des fils et la position du nœud P, *sachant que les longueurs des fils non tirés sont :*

N° 1, 102^{cm}; N° 2, 101^{cm}; N° 3, 100^{cm};
N° 4, 97^{cm}; N° 5, 98^{cm}; N° 6, 99^{cm}.

Le côté de l'hexagone a 100^{cm} *de longueur.*

SOLUTION.

On trouvera que les fils 1, 3, 5 ne sont pas tendus et que les fils 2, 4, 6 ont une tension de 10^{g}.

Pour le nœud P, par rapport aux axes dont celui des x est la ligne 3, 6, on trouve

$$x = 0,$$
$$y = -2,3 \text{ centimètres.}$$

(Juin 1913.)