V. THÉBAULT

Généralisation d'un théorème de M. T. Lemoyne

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 218-223

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__218_1>

[$K^1 2e$]

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE M. T. LEMOYNE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

M. T. Lemoyne a donné dans ce Journal, 1904, p. 400, le théorème suivant, sans démonstration :

Les axes radicaux des cercles podaires de chacun des points d'une transversale Δ, *par rapport à un triangle* ABC, *passent par un point fixe* ω; ce qui revient à dire que ω *a même puissance par rapport à tous ces cercles. Lorsque* Δ *coupe le cercle* ABC, *en deux points* P, Q, *les droites de Simson de* P *et* Q *se rencontrent au point* ω.

Cette proposition a été l'objet d'une étude géométrique de M. Neuberg, professeur à l'Université de Liége (*Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, juillet et août 1910).

La deuxième partie a été aussi établie analytiquement dans *Mathesis: Sur le cercle podaire*, novembre 1912, p. 238.

Je me propose ici, tout en présentant cette dernière partie d'une manière un peu plus générale, d'en donner une démonstration géométrique élémentaire assez élégante.

1. Je donnerai tout d'abord le théorème suivant généralisant celui que j'ai signalé en juin 1910, p. 272 [1] :

On coupe les côtés d'un triangle ABC *par une transversale* Δ, *et des sommets, on mène trois parallèles quelconques* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, *faisant avec* Δ *un angle aigu* φ. *Puis de* α, β, γ, *on trace les droites* αM, βN, γP *faisant des angles égaux à* φ, *avec* BC, CA, AB, *dans le même sens de rotation. Les droites* αM, βN, γP *concourent en un point* ω.

Considérons le cas particulier d'une transversale Δ_1, parallèle à Δ, qui contient le sommet B (*fig.* 1). Le cas général s'en déduira par une translation suivant $A\alpha$ qui amène le sommet B sur Δ. Traçons les droites $\alpha_1\omega_1$ et $\gamma_1\omega_1$ faisant respectivement avec BC et AB, dans le même sens, l'angle φ. Ces droites se coupant en ω_1, je dis que $B\omega_1B'$ fait avec CA le même angle φ.

Les quadrilatères inscriptibles $\alpha_1A'C\gamma$ et $\alpha_1C'A\gamma_1$, donnent

$$B\alpha_1.B\gamma_1 = BC'.BA = BA'.BC;$$

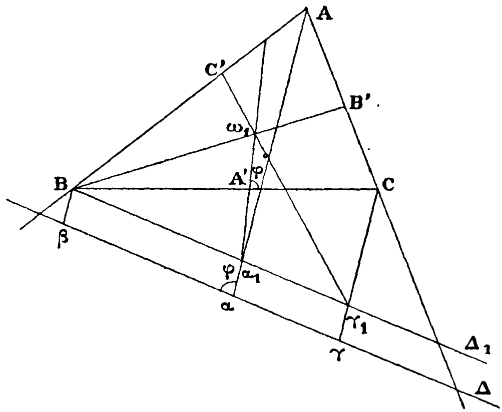
le quadrilatère $A'C'AC$ est inscriptible, et

$$\widehat{B\omega_1A'} = \widehat{BC'A'} = \widehat{C}.$$

[1] Ce théorème énoncé, page 272 (1910), est dû à M. NEUBERG. *Projections et contre-projections d'un triangle fixe*, 1890, p. 75

Les triangles $B\omega_1 A'$ et $BB'C$ sont alors semblables, et

Fig. 1.



$\alpha_1 A'$ et $B\omega_1 B'$ sont antiparallèles par rapport à BC et CA.

2. La théorie des droites isogonales par rapport aux côtés d'un triangle ABC permet de généraliser les propriétés de la droite de Simson.

Si d'un point M *du cercle circonscrit à un triangle* ABC *on mène les droites* MP, MQ, MR, *faisant des angles égaux avec* BC, CA, AB, *dans le même sens de rotation, les points* P, Q, R *sont en ligne droite. Réciproquement, d'ailleurs, si les droites* MP, MQ, MR, *également inclinées sur* BC, CA, AB, *ont leurs pieds en ligne droite, le point* M *appartient au cercle circonscrit au triangle* ABC.

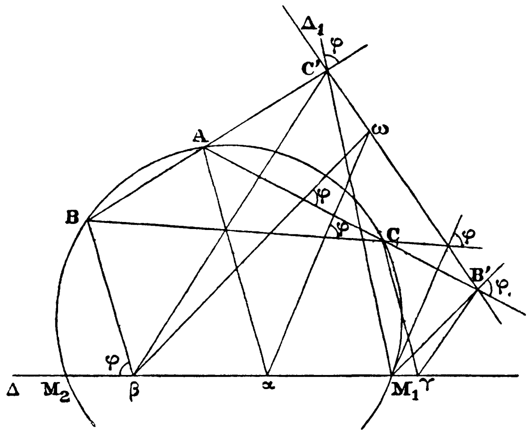
On obtient même ce résultat qui mérite peut-être d'être signalé :

Les droites Δ_1 *et* Δ_2, *contenant les trois points en* *ligne droite obtenus comme précédemment en menant de deux points* M *et* M′ *du cercle circonscrit à un triangle des droites* MP, MQ, MR, M′P′, M′Q′, M′R′ *faisant avec les côtés des angles égaux, font entre elles un angle égal à l'angle inscrit sous-tendu par la corde* MM′ *ou à son supplément, et réciproquement.*

En particulier, *si* MM′ *est un diamètre du cercle circonscrit, les droites* Δ_1 *et* Δ_2 *sont rectangulaires.*

3. *Soient* Δ_1 *et* Δ_2 *deux droites précédentes obtenues en traçant des points* M_1 *et* M_2, *où la transversale* Δ *du paragraphe* 1 *rencontre le cercle circonscrit au triangle* ABC, *des droites* M_1P_1, M_1Q_1, M_1R_1, M_2P_2, M_2Q_2, M_2R_2 *faisant avec* BC, CA, AB, *dans*

Fig. 2.



le même sens, des angles égaux à l'angle φ *de* Δ *avec les parallèles* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$. *Les droites* Δ_1 *et* Δ_2 *se rencontrent au point* ω *de concours de* αM, βN *et* γP (*fig.* 2).

C'est le théorème de M. Lemoyne sous une forme plus générale. Il sera démontré si nous prouvons que le point ω appartient à Δ_1, car nous aurons ainsi montré que l'une quelconque des droites, $\alpha\omega$ par exemple, est rencontrée par l'une quelconque des deux autres droites analogues sur l'une quelconque des droites Δ_1 et Δ_2 relatives à M_1 et M_2. Or, les quadrilatères inscriptibles $M_1\gamma CB'$ et $M_1\beta BC'$, donnent

$$\text{angle } M_1\gamma B' = 180^\circ - M_1CB'$$

et

$$\text{angle } M_1\beta C' = \text{angle } M_1BC',$$

c'est-à-dire que

$$\text{angle } M_1CB' = \text{angle } M_1BC'.$$

On en conclut que les angles $(180^\circ - M_1\gamma B')$ et $M_1\beta C'$ sont égaux, et que les droites $\beta C'$ et $\gamma B'$ sont parallèles.

Considérons alors l'hexagone $\beta\omega\gamma B'M_1C'$; $\beta C'$ et $\gamma B'$ sont parallèles; $\beta\omega$ et M_1B' sont parallèles par construction, de même que $\gamma\omega$ et M_1C'.

Cet hexagone est donc un hexagone de Pascal, où la droite de Pascal est à l'infini. Trois sommets, β, γ, M_1 étant en ligne droite, il en est de même des trois autres, ω, B' C' et le point ω est sur Δ_1.

Remarques. — *a*. M. Neuberg a donné dans le *Wiskundig Tydschrift*, 10ᵉ année, p. 80, le théorème suivant :

Par les sommets d'un triangle ABC, *on mène trois parallèles* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *qui rencontrent une transversale quelconque* Δ *en* α, β, γ. *Les parallèles aux côtés* BC, CA, AB *menés par* α, β, γ *forment un triangle* $A_1B_1C_1$ *égal à* ABC ;

qu'il a d'ailleurs étendu au tétraèdre (*Mathesis*, 1913, question 1939).

En appliquant la réciproque de l'une des propriétés du paragraphe 2, on obtient ce résultat :

Le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ *contient le point* ω *correspondant à l'angle* φ *des parallèles* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *avec la transversale* Δ.

b. Enfin, dans le cas particulier où $\varphi = 90°$ et où la corde M_1M_2 devient tangente au cercle O circonscrit à ABC, Δ_1 et Δ_2 sont confondues et ω devient le point où ces droites touchent leur enveloppe, une hypocycloïde à trois rebroussements.

Si la transversale Δ se déplace parallèlement à une direction donnée, ω décrit une tangente à l'hypocycloïde perpendiculaire à Δ.

Ces résultats se trouvent dans l'Ouvrage de M. Neuberg, précédemment cité : *Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe*, p. 76.

Dans le cas plus général envisagé dans cette Note, quand M_1M_2 est tangente au cercle circonscrit O, ω est encore le contact de Δ_1 avec son enveloppe.