

J. MALAISE

Sur une formule d'approximation pour les nombres de Bernoulli, très grands

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14
(1914), p. 174-179

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__174_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D6cδ]

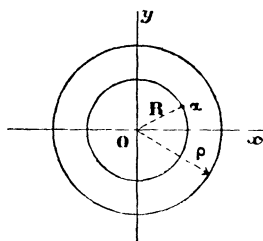
**SUR UNE FORMULE D'APPROXIMATION
POUR LES NOMBRES DE BERNOULLI, TRÈS GRANDS;**

PAR M. J. MALAISE.

Soit

$$f(z) = \frac{A_0(h-1)!}{(\alpha-z)^h} + \frac{A_1(h-2)!}{(\alpha-z)^{h-1}} + \dots + \frac{A_{h-1}}{\alpha-z} + \varphi(z) \quad (1),$$

où $\varphi(z)$ demeure finie pour $z = \alpha$ et est développable dans un cercle de rayon $\rho > R$, en appelant R le rayon



du cercle de convergence de $f(z)$ (voir la figure). Soit

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$$

Posons

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n.$$

Remarquons que dans $\frac{A_i}{(\alpha-z)^{h-i}}$ qui se développe

(1) Voir M. G. DARBOUX, *Journal de Liouville*, 1878.

comme suit :

$$A_i \left[x^{i-h} - \frac{i-h}{1} x^{i-h-1} z + \dots \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{(i-h)(i-h-1)\dots(i-h-n+1)}{n!} \alpha^{i-h-n} z^n + \dots \right]$$

on a, pour coefficient de z^n , ceci :

$$\frac{A_i}{\alpha^{h+n-i}} \frac{(h-i)(h+1-i)\dots(h+n-1-i)}{n!}.$$

Donc, en identifiant les expressions $f(z)$, on a

$$a_n \alpha^n = \sum_{i=0}^{i=h-1} (h-i)! \frac{A_i}{\alpha^{h-i}} \\ \times \frac{(h-i)(h-i+1)\dots(h-i+n-1)}{n!} + b_n \alpha^n,$$

ou, si l'on veut,

$$(1) \quad a_n \alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h} (n+1)(n+2)\dots(n+h-1) \\ + \frac{A_1}{\alpha^{h-1}} (n+1)\dots(n+h-2) + \dots + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + b_n \alpha^n.$$

La série $\varphi(z)$ est convergente dans un cercle de rayon $\rho > R$, donc dans la couronne circulaire. Prenons K , tel que : $0 < K < \rho - R$. Alors, à cause du théorème de Cauchy-Hadamard (1), on a

$$\lim (\rho - K)^n b_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\varepsilon_n}{(\rho - K)^n}$$

$$\left(\varepsilon_n \text{ tend vers zéro avec } \frac{1}{n} \right).$$

(1) Ce théorème dit que, pour $\Sigma a_n z^n$, le rayon du cercle de convergence R est donné par $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$.

La $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\text{tang } x$ vaut le coefficient de t^n , multiplié par $n!$

Cherchons le coefficient a_n de t^n dans le développement

$$f(t) = \sum_0^n a_n t^n.$$

La formule (3) donne

$$\frac{d^n \text{tang } x}{dx^n} = \frac{n!}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{n+1}} (1 + \varepsilon).$$

où x est réel et positif.

Cette formule est valable, en général, si

$$\left| \frac{\pi}{2} - x \right| < \left| \frac{\pi}{2} - x \right|,$$

c'est-à-dire lorsque x est imaginaire à partie réelle positive.

Lorsque x est imaginaire à partie réelle négative, ou en particulier lorsque x est réel et négatif, on a

$$\frac{d^n \text{tang } x}{dx^n} = \frac{n! (-1)^{n+1}}{\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^{n+1}} (1 + \varepsilon),$$

car, dans ce cas, le cercle de convergence passe par le pôle $\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Enfin, si

$$\left| \frac{\pi}{2} - x \right| = \left| \frac{\pi}{2} + x \right|,$$

c'est-à-dire lorsque x est une imaginaire pure, ou lorsque $x = 0$, on a deux pôles sur le cercle de conver-

gence. Alors :

$$\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} = n! \left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^{n+1}} \right] (1 + \varepsilon) \quad (1).$$

On sait que

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} x &= 2^2(2^2 - 1) \frac{B_2}{2!} x - 2^4(2^4 - 1) \frac{B_4}{4!} x^3 + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} 2^{2n}(2^{2n} - 1) \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots, \end{aligned}$$

où $B_2, B_4, \dots, B_{2n}, \dots$ représentent les nombres de Bernoulli.

En comparant notre formule avec ce résultat, nous trouvons

$$B_{2n} = 2 \frac{(2n)!}{(2^{2n} - 1)\pi^{2n}} (1 + \varepsilon).$$

Mais on a, d'après la formule de Stirling,

$$(2n)! = (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} \quad (\text{approximativement}).$$

(¹) On sait que

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} x &= \frac{2^1}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2p-1)^2} \right) x^2 \\ &+ \frac{2^5}{\pi^4} \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{(2p-1)^4} \right) x^4 + \dots \end{aligned}$$

Les coefficients de ce développement *ne sont pas* égaux à

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} \right)_0,$$

mais il est curieux qu'ils tendent à le devenir quand n grandit, car, pour n impair très grand

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} \right)_0 = \frac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}} (1 + \varepsilon)$$

Il vient

$$B_{2n} = \frac{4(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{n}}{(2^{2n} - 1) \pi^{2n - \frac{1}{2}}} (1 + \varepsilon),$$

où ε tend vers zéro, avec $\frac{1}{n}$.

Telle est la formule d'approximation que nous voulions établir pour les grands nombres de Bernoulli.