

R. GOORMAGHTIGH

Sur les cordes d'une courbe vues d'un point fixe sous un angle constant

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14 (1914), p. 145-161

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__145_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[O'2q]

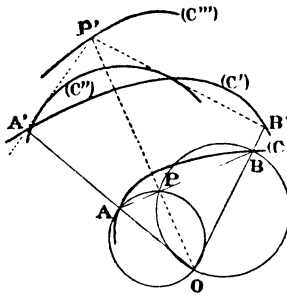
**SUR LES CORDES D'UNE COURBE VUES D'UN POINT FIXE
SOUS UN ANGLE CONSTANT;**

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

I. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

1. Soient O un point fixe dans le plan d'une courbe (C) , A et B deux points variables de (C) tels que l'angle AOB soit un angle constant α (*fig. 1*). Désignons par E_α l'enveloppe de la corde AB .

Fig. 1.



Soit P la projection de O sur la corde AB ; ce point est à l'intersection des cercles décrits sur OA et OB comme diamètres, et l'enveloppe E_α est l'antipodaire du lieu de P . Transformons la figure par une inversion de pôle O , de puissance quelconque, et affectons d'accents les lettres qui désignent les transformés des éléments correspondants de la figure primitive.

Les droites $A'P'$ et $B'P'$ enveloppent l'antipodaire (C'') de la courbe (C') relativement à O , et, comme l'angle

$A'P'B'$ est constant et égal à $\pi - \alpha$, le point P' décrit la courbe isoptique d'angle $\pi - \alpha$ de la courbe (C') .

Or, l'antipodaire (C'') de l'inverse (C') de la courbe (C) est la polaire réciproque de (C) par rapport à un cercle de centre O ⁽¹⁾.

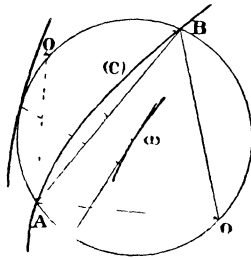
Le lieu de P est donc l'inverse de l'isoptique (C''') de (C'') , et E_α est l'antipodaire de l'inverse de (C''') .

On est ainsi conduit à ce théorème :

THÉOREME A. — *L'enveloppe E_α est la polaire réciproque de l'isoptique d'angle $\pi - \alpha$ de la polaire réciproque de (C) .*

2. Soit ω le centre du cercle AOB , et cherchons le lieu L_α de ce point (*fig. 2*). Designons par Q le point

Fig 2.



d'intersection des perpendiculaires élevées en A et B sur OA et OB ; le lieu de ω est homothétique de celui de Q (rapport 1:2). Or, QA et QB enveloppent l'antipodaire de (C) par rapport à O et, comme l'angle Q est constant et égal à $\pi - \alpha$, on a ce théorème :

THÉOREME B. — *Le lieu L_α du centre du cercle AOB*

⁽¹⁾ S. LIE und G. SCHIFFERS, *Geometrie der Berührungstransformationen*, t I, 1896, p. 17.

est homothétique de l'isoptique d'angle $\pi - \alpha$ de l'antipodaire de (C).

Les considérations qui précèdent montrent qu'il existe entre une enveloppe E_α et un lieu L_α la relation suivante :

THÉORÈME C. — *L'enveloppe E_α pour une courbe (C) est homothétique de la polaire réciproque du lieu L_α pour la courbe inverse.*

Dans le cas où l'angle α est droit, ω est le milieu de AB, et le théorème B devient le suivant :

THÉORÈME D. — *Le lieu $L_{\frac{\pi}{2}}$ des milieux des cordes d'une courbe, vues d'un point fixe sous un angle droit, est homothétique de l'orthoptique de l'antipodaire de la courbe.*

Enfin, l'enveloppe du cercle AOB s'obtient aisément en utilisant le théorème B. On sait que l'enveloppe d'un cercle qui passe par un point fixe, est homothétique de la podaire (rapport 2 : 1) du lieu de son centre.

THÉORÈME E. — *L'enveloppe du cercle AOB est la podaire de l'isoptique d'angle $\pi - \alpha$ de l'antipodaire de (C).*

Les théorèmes précédents ramènent la recherche des lieux et des enveloppes considérés à des transformations connues.

II. — APPLICATIONS.

3. *Coniques.* — La polaire réciproque d'une conique par rapport à un cercle quelconque est une seconde

conique; les isoptiques de cette conique sont des spiriques de Perseus (1).

L'enveloppe des cordes d'une conique vues d'un point fixe sous un angle constant est la polaire réciproque d'une spirique de Perseus.

La recherche de cette enveloppe a été proposée par M. Barisien dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (2). La solution analytique (*Quilibet*) montre que l'enveloppe est de la quatrième classe, ce qui résulte aussi du théorème précédent.

Si le point O est sur la conique, la polaire réciproque de la conique par rapport à un cercle de centre O est une parabole, dont les isoptiques sont des coniques.

Ainsi, les cordes d'une conique vues d'un point fixe de la courbe sous un angle constant, enveloppent une conique.

Si le point O coïncide avec un foyer, la polaire réciproque est un cercle et l'enveloppe E_α est une conique.

Si l'angle α est droit et si le point O est quelconque, l'orthoptique de la polaire réciproque étant un cercle, l'enveloppe $E_{\frac{\pi}{2}}$ est une conique.

Quand le point O est au centre de la conique, cette enveloppe est un cercle.

Enfin, si le point O est sur la conique et si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la polaire réciproque ayant pour orthoptique une droite, la corde AB pivote autour du pôle de cette droite. C'est le théorème de Frégier.

4. Si l'on considère les cordes d'un cercle qui

(1) LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 132.

(2) Février 1913, p. 30.

passent par un point fixe, leurs milieux sont sur un cercle passant par le centre du cercle considéré. Par affinité, cette propriété s'étend aux coniques.

Dès lors, si l'on considère les cordes d'une conique vues d'un point de la courbe sous un angle droit, elles passent par un point fixe, et la propriété précédente est applicable.

Ainsi, le lieu des milieux des cordes d'une conique, vues d'un point de la courbe sous un angle droit, est une conique passant par le centre de la conique donnée.

Ceci posé, remarquons que l'inverse d'une conique est une cubique circulaire lorsque le centre d'inversion appartient à la courbe, et que ce centre est le point double de la cubique. En appliquant le théorème C, on aura donc la propriété suivante :

Les cordes d'une cubique circulaire vues du point double sous un angle droit enveloppent une conique (1).

On déduit aussi de ce qui précède, au moyen du théorème D, que l'orthoptique de l'antipodaire d'une conique, par rapport à un point de cette conique, est une seconde conique.

On sait que, dans le cas de la parabole, cette antipodaire est une parabole semi-cubique de Neil.

Ainsi, l'orthoptique de la parabole de Neil est une conique.

En d'autres termes :

Le lieu des points d'où l'on peut mener à une parabole deux normales rectangulaires est une conique.

(1) Voir, *Intermédiaire des Mathématiciens*, solution de la question 2753, 1904.

5. Le théorème D donne lieu à de nombreuses conséquences intéressantes. On sait que les quartiques bicirculaires unicursales sont les podaires des coniques. On a donc ce théorème :

Le lieu des milieux des cordes d'une quartique bicirculaire unicursale vues du point double sous un angle droit est une circonférence.

En particulier, la podaire centrale d'une conique est une lemniscate de Booth, et, dans ce cas, la circonférence trouvée est concentrique à la conique. On en déduit aisément cette propriété ⁽¹⁾ :

Les cordes d'une lemniscate de Booth, vues du centre sous un angle droit, sont toutes égales entre elles.

De même, les podaires de la parabole sont les cubiques circulaires. Comme l'orthoptique d'une parabole est sa directrice, on peut donc dire que *le lieu des milieux des cordes d'une cubique circulaire, vues du point double sous un angle droit, est une parallèle à l'asymptote* ⁽²⁾.

L'application du théorème D donne aussi la démonstration de cette propriété du trifolium droit signalée par M. Barisien ⁽³⁾ :

Le lieu des milieux des cordes du trifolium droit, vues du point triple sous un angle droit, est un cercle.

En effet, l'antipodaire du trifolium droit, par rapport

⁽¹⁾ *Mathesis*, 1913, p. 64.

⁽²⁾ *Intermédiaire des Mathématiciens*, question 2707 (Th. Lemoine), 1904.

⁽³⁾ *Mathesis*, 1913, p. 263.

à son point triple, est une hypocycloïde à trois rebroussements, dont l'orthoptique est un cercle (cercle tri-tangent).

On voit, de plus, que la propriété est vraie pour une podaire quelconque de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

En particulier, *le lieu des milieux des cordes d'un trifolium oblique, vues du point triple sous un angle droit, est une circonférence.*

6. Le théorème B appliqué au cas des cubiques circulaires donne le théorème suivant :

Si une corde AB d'une cubique circulaire est vue du point double O sous un angle constant, le centre du cercle AOB décrit une conique, quand la corde AB varie.

Le théorème E établit, entre les cubiques circulaires et les quartiques bicirculaires unicursales, une relation remarquable.

Les cercles qui passent par le point double d'une cubique circulaire et qui déterminent avec la courbe des cordes vues de ce point sous un angle constant, enveloppent une quartique bicirculaire unicursale.

7. Au point de vue qui nous occupe, les courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation

$$(1) \quad \rho = a \cos \mu\theta + b \sin \mu\theta,$$

où μ est un entier impair, méritent une attention spéciale. Elles peuvent être considérées comme résultant de l'addition des rayons vecteurs de deux rosaces de même indice. Si ρ et θ désignent les coordonnées polaires de A, et ρ' le rayon vecteur OB qui correspond

à l'angle $\theta - \frac{\pi}{2}$, on a

$$\rho' = a \cos\left(\mu\theta - \mu\frac{\pi}{2}\right) + b \sin\left(\mu\theta - \mu\frac{\pi}{2}\right),$$

ou

$$(2) \quad \rho' = \pm a \sin \mu\theta \mp b \cos \mu\theta.$$

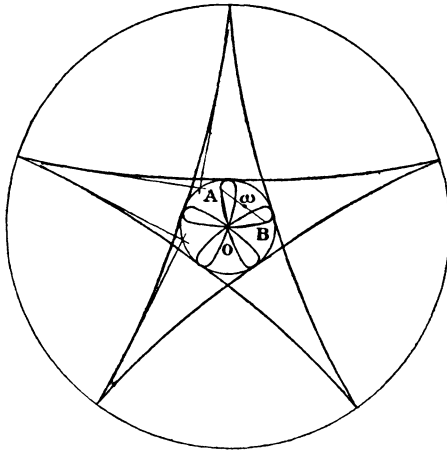
On déduit de (1) et (2)

$$\begin{aligned} \rho^2 + \rho'^2 = & a^2 \cos^2 \mu\theta + b^2 \sin^2 \mu\theta + 2ab \sin \mu\theta \cos \mu\theta \\ & + a^2 \sin^2 \mu\theta + b^2 \cos^2 \mu\theta - 2ab \sin \mu\theta \cos \mu\theta = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

L'hypoténuse du triangle rectangle AOB est donc constante, ainsi que la médiane issue de O qui en vaut la moitié. On a donc ce théorème :

Pour les courbes (1), le lieu $L_{\frac{\pi}{2}}$ est un cercle ayant

Fig. 3.



son centre à l'origine. En particulier (fig. 3), si a est nul, les courbes (1) sont des Rosaces (1). Le lieu des

(1) LORIA-SCHÜTTE, *Spez. ebene Kurven*, t. 1, p. 358.

milieux des cordes d'une rosace d'indice impair, vues du centre sous un angle droit, est un cercle concentrique.

Pour les courbes inverses des Rosaces (*Ährenkurven*) ⁽¹⁾, l'enveloppe $E_{\frac{\pi}{2}}$ sera un cercle, en vertu du théorème C. En particulier, si $\mu = 3$, la courbe correspondante a pour équation

$$\rho = \frac{b}{\sin 3\theta}$$

et est donc une trisectrice de G. de Longchamps ⁽²⁾.

Ainsi, *les cordes d'une trisectrice de Longchamps, vues du centre sous un angle droit, enveloppent un cercle concentrique.*

8. Le théorème D permet de déduire, de ces considérations relatives aux Rosaces, une propriété de certaines hypocycloïdes. On sait, en effet ⁽³⁾, qu'une épicycloïde ou une hypocycloïde de module n (rapport du rayon du cercle décrivant à celui du cercle fixe) ont pour podaires centrales des Rosaces d'indices

$$\frac{1}{1+2n} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1-2n}.$$

Comme

$$\frac{1}{1+2n} < 1,$$

les Rosaces considérées au paragraphe précédent ne peuvent pas être des podaires d'épicycloïdes. Mais, si

$$\frac{1}{1-2n} = k,$$

(1) LORIA-SCHÜTTE, *Spez. ebene Kurven*, t. I, p. 367.

(2) *Ibid.*, t. I, p. 92.

(3) *Ibid.*, t. II, p. 108.

k étant impair, ou si

$$n = \frac{k-1}{2k},$$

l'hypocycloïde correspondante aura pour podaire une des Rosaces considérées et, pour orthoptique, un cercle concentrique au cercle de base, en vertu du théorème D. On a donc ce théorème :

Les hypocycloïdes de module

$$n = \frac{k-1}{2k},$$

où k est un entier impair, ont pour orthoptique un cercle.

En particulier, si $k = 3$, $n = \frac{1}{3}$, et l'on retrouve une propriété bien connue de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Si $k = 5$, $n = \frac{2}{3}$, et l'on obtient une hypocycloïde étoilée à cinq rebroussements (*fig. 3*), dont l'orthoptique est un cercle (cercle cinq fois tangent).

III. — COURBES A POINT DE FRÉGIER.

9. On peut se demander dans quel cas l'enveloppe $E_{\frac{\pi}{2}}$ se réduit à un point, comme dans le cas où l'on considère une conique et que le point O appartient à cette conique. On peut alors dire que la courbe a un *point de Frégier*.

En vertu du théorème A, il faudra que la courbe (C'') ait pour orthoptique une droite, par exemple l'axe des x . Or, ceci revient à chercher les courbes qui se transforment en elles-mêmes par une transformation orthotangentielle définie, en coordonnées tangentielles,

par les équations de transformation :

$$(3) \quad x_1 : y_1 : z_1 = y : -x : \frac{yz}{x}.$$

En coordonnées ponctuelles, ces équations de transformation sont celles qui caractérisent une inversion de Hirst, dans laquelle on fait correspondre à un point M un point M' tel que MM' soit parallèle à l'axe des y et que la distance MM' soit vue de l'origine sous un angle droit. Cette transformation est la polaire réciproque de la transformation orthotangentielle par rapport au cercle

$$(4) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Si donc une courbe algébrique

$$(5) \quad f(x, y, z) = 0$$

est telle que son équation soit identique à

$$(6) \quad f\left(y, -x, \frac{yz}{x}\right) = 0,$$

elle aura un point de Frégier à l'infini. Pour en déduire une courbe à point de Frégier à distance finie, il suffit de prendre la polaire réciproque par rapport au cercle (4), puis la polaire réciproque de la courbe obtenue par rapport à un cercle quelconque.

10. Cherchons donc les fonctions de degré n telles que les équations (5) et (6) soient identiques. Remarquons d'abord que si l'on considère un terme

$$x^{n-2\alpha} y^\alpha z^{\alpha+l},$$

où l'exposant de z est supérieur à celui de y , la subs-

stitution (3) donnera lieu à un terme

$$(-1)^{n-2\alpha-l} \frac{y^{n-\alpha} z^{\alpha+l}}{x^l},$$

dans lequel x est en dénominateur. Désignons par k l'exposant de la plus haute puissance de x qui pourra ainsi se produire en dénominateur. Quand on voudra ramener l'équation (6) à la forme primitive (5), on devra multiplier tous les termes par x^k ; donc, pour retrouver une équation de degré n , on devra pouvoir diviser tous les termes de l'équation (6) par un terme de degré k . Or, tous les termes de cette équation ne peuvent renfermer z , car les z de l'équation (6) proviennent des mêmes puissances de z dans l'équation (5). Tous les termes de l'équation (6) ne sont pas divisibles par x , puisque, par hypothèse, la substitution (3) donne lieu à des fractions où x est en dénominateur. Il résulte de là que tous les termes de l'équation (6) doivent être divisibles par y^k . Ainsi, pour que les équations (5) et (6) soient identiques, il faut que

$$(7) \quad f(x, y, z) = \frac{x^k}{y^k} f\left(y, -x, \frac{yz}{x}\right).$$

Pour que tous les termes de l'équation (6) soient divisibles par y^k , il faut que, dans l'équation primitive (5), la somme des exposants de z et x soit au moins égale à k .

Ceci posé, considérons un terme de l'équation (5)

$$(8) \quad z^p x^{n-p-h} y^h \quad (p < k).$$

La transformation (3) et la multiplication par $\frac{x^k}{y^k}$ donnent lieu au terme

$$(9) \quad y^{n-p-h} (-1)^h x^h \frac{y^p z^p}{x^p} \frac{x^k}{y^k} = (-1)^h y^{n-k-h} x^{k-p+h} z^p.$$

En vertu de (7), ce terme doit exister dans l'équation (5). Mais il faut que, si l'on transforme (9), on retrouve (8); or, si l'on transforme le terme (9), on trouve

$$(-1)^{n-k} x^{n-p-h} z^p.$$

Il faut donc que $n - k$ soit pair. Le même raisonnement s'applique au cas où $p > k$, mais alors h devra être au moins égal à $p - k$, conformément à ce qui a été dit plus haut relativement aux exposants de z et x . On voit, en outre, aisément que p peut varier de 0 à $\frac{1}{2}(n + k)$ et h de 0 à $\frac{1}{2}(n - k)$ ou de $p - k$ à $\frac{1}{2}(n - k)$, suivant les cas.

De plus, on aurait pu faire correspondre à (8) le terme (9) changé de signe; on aurait alors dû changer tous les signes dans l'équation (6).

On arrive ainsi à la proposition suivante :

Les équations

$$(10) \quad \Sigma z^p \} \Sigma l_{p,h} [x^{n-p-h} y^h + (-1)^h x^{k-p+h} y^{n-k-h}] \} = 0$$

et

$$(11) \quad \Sigma z^p \} \Sigma l_{p,h} [x^{n-p-h} y^h - (-1)^h x^{k-p+h} y^{n-k-h}] \} = 0$$

représentent les courbes algébriques qui ont un point de Frégier à l'infini.

On donnera à k une valeur inférieure à n et de même parité que n , on fera varier p de 0 à $\frac{n+k}{2}$ et, à chaque valeur de p inférieure à k , on fera correspondre les valeurs de h de 0 à $\frac{1}{2}(n - k)$; à partir de $p = k$, on fera varier h de $p - k$ à $\frac{n-k}{2}$.

En vertu du paragraphe 9, pour avoir une courbe à point de Frégier à distance finie, il suffit de considérer,

dans (10) et (11), x, y, z comme coordonnées tangentielles et de prendre les polaires réciproques par rapport à un cercle

$$(12) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Si l'on transporte l'origine au point (α, β) , on trouve les équations

$$\Sigma(\alpha x + \beta y - r^2)^p \left\{ \Sigma l_{p,h} [x^{n-p-h} y^h + (-1)^h x^{k-p+h} y^{n-k-h}] \right\} = 0$$

et

$$\Sigma(x\alpha + \beta y - r^2)^p \left\{ \Sigma l_{p,h} [x^{n-p-h} y^h - (-1)^h x^{k-p+h} y^{n-k-h}] \right\} = 0,$$

qui caractérisent les courbes qui ont un point de Frégier correspondant à l'origine.

11. Cherchons quand les courbes représentées par (10) et (11) en coordonnées tangentielles sont tangentes à l'axe des x . Les coordonnées de cet axe étant $0, 1, 0$, il suffira de chercher quand tous les termes des équations considérées renferment x ou z . Or, les termes qui ne renferment pas z sont

$$\Sigma l_{0,h} [x^{n-h} y^h + (-1)^h x^{k+h} y^{n-k-h}]$$

et

$$\Sigma l_{0,h} [x^{n-h} y^h - (-1)^h x^{k+h} y^{n-k-h}].$$

Tous les termes $x^{n-h} y^h$ renferment x , car h est inférieur à n . Pour que le terme

$$x^{k+h} y^{n-k-h}$$

ne renferme pas x , il faut $k = h = 0$.

Ainsi, les courbes représentées par (10) et (11) en coordonnées tangentielles touchent l'axe des x , excepté quand $k = 0$. Donc leurs polaires réciproques passent

par le pôle de cet axe. Si l'on observe que $n - k$ est toujours pair, on déduit, de là, le théorème suivant :

Si une courbe d'ordre impair a un point de Frégier, ce point appartient à la courbe.

Si une courbe d'ordre pair a un point de Frégier, ce point appartient à la courbe si $k \neq 0$, et se trouve en dehors de la courbe si k est nul.

12. Cubiques. — Dans le cas où $n = 3$, on a $k = 1$. Les équations (10) et (11) deviennent

$$l_{0,0}(x^3 \pm xy^2) + l_{0,1}(x^2y \mp x^2y) \\ + z[l_{1,0}(x^2 \pm y^2) + l_{1,1}(xy \mp xy)] + z^2[l_{2,1}(y \mp y)] = 0.$$

On voit que la seule équation à considérer est l'équation (11) et qu'on peut l'écrire

$$(13) \quad x(x^2 - y^2) + ax^2y + b(x^2 - y^2) + cxy + dy = 0.$$

Cette équation représente les cubiques qui ont un point de Frégier à l'infini dans la direction de l'axe des y . Si $d = 0$, l'origine est un point double; les tangentes à la courbe en ce point ont pour coefficients angulaires les racines de l'équation

$$bm^2 + cm - b = 0,$$

et sont, par suite, rectangulaires. Il en sera de même pour la polaire réciproque, par rapport au cercle (12), de la courbe représentée en coordonnées tangentielles par l'équation (13) où $d = 0$. On en déduit ce théorème :

Les cubiques nodales dont les tangentes au point double sont rectangulaires ont un point de Frégier situé sur la courbe.

On retrouve ainsi une propriété signalée par M. Th. Lemoyne dans l'*Intermédiaire des Mathéma-*

ticiens (1). Mais l'analyse précédente montre qu'il y a d'autres cubiques ($d \neq 0$) qui possèdent un point de Frégier.

13. *Quartiques*. — Dans le cas de $n = 4$, on trouve
 $x(ax + b)(x^2 - y^2) + y(cx^2 + dx^2 + ex + f) = 0$ ($k = 2$).
 $x^4 + y^4 + axy(x^2 - y^2) + bx^2y^2 + c(x^2 - y^2)y + dxy^2 + fy^2 = 0$
 ($k = 0$).

A cette dernière classe de quartiques appartient le trifolium droit, que l'on obtient pour

$$b = 2, \quad a = d = f = 0.$$

Ainsi, *les cordes d'un trifolium droit vues du point triple sous un angle droit sont parallèles entre elles*.

Cette propriété résulte aussi de la transformation indiquée par G. de Longchamps pour déduire le trifolium du cercle (2); cette transformation montre aussi que la propriété est vraie pour le trifolium oblique. En particulier, elle a lieu pour le folium double (3).

Si $a = b = d = f = 0$, on trouve une courbe d'équation

$$x^4 + y^4 + c(x^2 - y^2)y = 0.$$

C'est le trifolium de Cramer (4). On a donc ce théorème :

Les cordes d'un trifolium de Cramer, vues du

(1) Question 2706, 1904, p. 4.

(2) LORIA-SCHÜTTE, t. I, p. 168.

(3) Question 2876 de M. Lemoyne dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1905, p. 27.

(4) CRAMER, *Introduction à l'Analyse des courbes algébriques*, 1750, p. 421. — LORIA-SCHÜTTE, t. I, p. 171.

(161)

point triple sous un angle droit, sont parallèles à l'axe de symétrie de la courbe.