CHALDE

Sur une formule de sommation connue

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 124-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__124_1>

[D2b]

SUR UNE FORMULE DE SOMMATION CONNUE;

PAR M. CHALDE.

La formule

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^\infty \frac{1}{m^2},$$

qui est un cas particulier de formules relatives aux quantités $\sum \frac{1}{m^{2k}}$ (JORDAN, *Cours d'Analyse*), s'établit d'habitude en comparant les développements de $\sin x$ en série et en produit infini, ou en développant la fonc-

---

une autre, et par la nature même de la question, dans presque toutes les démonstrations de l'équation de fermeture données jusqu'ici par divers auteurs; dégagé par M. Stekloff de la manière la plus heureuse, ce lemme doit rendre, à notre avis, de grands services dans ce genre de questions.

(1) *Math. Annalen*, 1903.

(2) Après la rédaction de cette Notice et pendant la correction des épreuves, j'ai appris qu'un théorème très général dans cet ordre d'idées a été établi tout récemment par M. Severini (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. XXXVI).

tion x^2 en série de Fourier. M. Camille Denquin (*Nouv. Ann.*, 1912, p. 127) a établi directement la formule équivalente

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

en partant de la formule de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

On peut déduire la formule en question du rapprochement des formules

$$(1) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + \sum \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$
$$(w = 2m\omega + 2m'\omega'),$$

$$(2) \qquad \frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{u^2} + \sum \frac{1}{\left(u - m\pi\right)^2}.$$

On a en général, avec des périodes identiques,

$$pu = \frac{1}{sn^2 u} - \frac{1+k^2}{3},$$

la fonction pu étant construite à partir de quantités e_1, e_2, e_3 qui satisfont aux relations

$$e_1 - e_3 = 1, \qquad e_2 - e_3 = k^2,$$

en employant les notations habituelles ([1]); pour $k = 0$, on a, en particulier,

$$pu = \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{3},$$

([1]) Dans l'opuscule de M. Ch. Henry, les indices 1 et 3 sont échangés ; on n'a plus, eu égard à d'autres notations classiques, $\omega_1 = \omega$, $\omega_3 = \omega'$, mais le contraire. Ce changement est regrettable, dans un livre d'ailleurs excellent.

l'une des périodes étant $\frac{\pi}{2}$, l'autre étant $i\infty$; la formule (1) devient

$$(1') \qquad \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{3} = \frac{1}{u^2} + \sum\left[\frac{1}{(u - m\pi)^2} - \frac{1}{m^2\pi^2}\right].$$

La comparaison des formules (1′) et (2) donne la formule cherchée, où le signe sommatoire s'applique de 1 à ∞, et non plus de $-\infty$ à $+\infty$, zéro excepté.