NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

NICOLAS KRYLOFF

Sur l'équation de fermeture pour les séries trigonométriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 119-124

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__119_1>

[D2bβ]

SUR L'ÉQUATION DE FERMETURE POUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. NICOLAS KRYLOFF,
à Saint-Pétersbourg.

Dans la théorie des séries de Fourier, ou plutôt dans la théorie des constantes de Fourier, la relation suivante joue un rôle tout à fait fondamental :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \tag{1}$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,ax,$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque, bornée et intégrable dans l'intervalle (a, b).

Cette formule (1) nommée *équation de fermeture* par M. W. Stekloff, a été généralisée par ce savant pour bien d'autres fonctions, rencontrées dans la Physique mathématique et l'Analyse pure.

Vu son importance, le théorème, exprimé par la relation (1), a reçu dans ce dernier temps plusieurs démonstrations ([1]), basées, presque toutes, sur diverses formules de sommation des séries trigonométriques divergentes.

Il est donc naturel d'essayer d'appliquer à la démonstration du théorème susdit une méthode plus directe de sommation, fondée sur cette remarque bien connue que toute série trigonométrique peut être intégrée terme à terme; autrement dit, en partant de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$, série généralement divergente, on forme, par l'intégration terme à terme, une fonction bien déterminée,

$$(2)\quad \mathrm{F}(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_0^x \cos nx\,dx + b_n\int_0^x \sin nx\,dx\right);$$

on est donc réellement en possession d'un procédé de sommation de la série, car, grâce à la formule (2) qui donne $\mathrm{F}(x)$, on obtient évidemment la fonction correspondant à la série de Fourier considérée, c'est-à-dire $f(x)$ partout où $f(x)$ est la dérivée de son intégrale indéfinie.

([1]) Ainsi, diverses démonstrations ont été données par M. Ulysse Dini (cette démonstration date de 1873, mais elle n'a pas été publiée par son auteur), M. V. Poussin (1893), M. Liapounoff (1896), M. Stekloff (1904, 1911), M. Hurwitz, (1903), M. Fatou (1905), M. Moore (1908), M. Westfall (1908).

Cela étant, remarquons que la série obtenue par l'intégration terme à terme sera, comme il est bien connu, uniformément convergente, si les extrémités de l'intervalle de l'intégration sont variables; par suite, la valeur de h étant donnée, on peut trouver, si petit que soit ε, une valeur N de n telle que, pour $n \geqq \mathrm{N}$, on ait

$$(3) \qquad \left| f_h - \left(\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{x-h}^{x+h} \cos it\,dt \right.\right. \\ \left.\left. + b_i \int_{x-h}^{x+h} \sin it\,dt \right) \right| < \varepsilon,$$

en posant

$$f_h = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt.$$

Désignons par $\mathrm{S}(n, h)$ la somme entre crochets dans le premier membre de la formule (3); alors, en intégrant entre 0 et 2π, on obtient, pour $n \geqq \mathrm{N}(h)$, le résultat suivant :

$$\int_0^{2\pi} [f_h - \mathrm{S}(n, h)]^2\,dx < \varepsilon_1,$$

où $\lim \varepsilon_1 = 0$.

En formant, à présent, la différence

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathrm{I}_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f - \mathrm{S}(n, h)]^2\,dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{ (f - f_h) + [f_h - \mathrm{S}(n, h)] \}^2\,dx, \end{aligned}$$

on s'assure bien facilement qu'on a

$$\mathrm{I}_n < \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (f - f_h)^2\,dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} [f_h - \mathrm{S}(n, h)]^2\,dx;$$

donc, pour une valeur suffisamment petite de h et pour une valeur suffisamment grande de n, on aura

$$I_n < \frac{2\varepsilon_2}{\pi} + \frac{2\varepsilon_1}{\pi};$$

par conséquent, I_n sera infiniment petit, car, d'après un lemme établi par M. W. Stekloff [1], on peut trouver une valeur de h assez petite pour que l'on ait

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} (f - f_h)^2\, dx < \varepsilon_2,$$

quelle que soit le petitesse de ε_2.

Écrivons maintenant la formule (4) sous une forme plus développée :

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2\, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f\,S(n, h)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(n, h)^2\, dx,$$

et remarquons que

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \cos it\, dt = \frac{\sin ih \cos ix}{ih},$$

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \sin it\, dt = \frac{\sin ih \sin ix}{ih}.$$

On a donc

$$S(n, h) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \frac{\sin ih}{ih}(a_i \cos ix + b_i \sin ix);$$

par conséquent,

$$(6) \qquad I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2\, dx - 2\sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)\frac{\sin ih}{ih} - \frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)\left(\frac{\sin ih}{ih}\right)^2;$$

---

[1] W. Stekloff et Tamarkine, *Problème des vibrations transversales d'une verge élastique homogène* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1911).

augmentons et diminuons le second membre de la formule (6) de la quantité

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + b_i^2\,;$$

cela ne change pas évidemment le résultat et l'on obtient ainsi

$$\text{(7)}\qquad \mathrm{I}_n = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2\,dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + b_i^2\right) + \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)\left(1 - \frac{\sin ih}{ih}\right)^2\right];$$

chacune des expressions entre parenthèses dans le second membre de (7) est positive : le fait est évident pour la seconde et, pour la première, il résulte de ce qu'on a toujours

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 + b_i^2 \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2\,dx\,;$$

donc, chacune d'elles peut être rendue aussi petite qu'on veut pour une valeur suffisamment petite de h et une valeur suffisamment grande de n, puisqu'il en est ainsi pour I_n, comme on l'a vu plus haut; par conséquent, on aura, en particulier,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 + b_i^2,$$

c'est-à-dire l'équation de fermeture qu'il fallait établir.

Quoique la démonstration bien simple, qui précède, utilise un lemme (¹) de M. W. Stekloff, elle diffère

(¹) Ce lemme intervient implicitement, sous une forme ou sous néanmoins des diverses démonstrations que ce géomètre a données de l'équation de fermeture pour les fonctions trigonométriques et se rapproche plutôt par son idée de la démonstration de M. Hurwitz ([1]) (fondée sur la méthode de sommation par les moyennes arithmétiques de M. Fejér); elle paraît cependant plus simple, car elle est basée sur la possibilité d'intégrer la série terme à terme ([2]).

Mai 1913.