Nouvelles annales de mathématiques

J. Lemaire

Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 49-81

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__49_0>

[M¹5b]

SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. J. LEMAIRE.
Professeur au Lycée Condorcet.

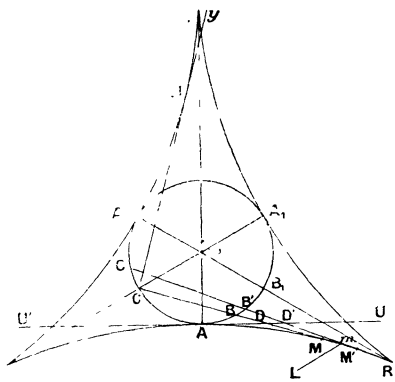
1. Nous nous proposons d'étudier l'hypocycloïde à trois rebroussements par des procédés élémentaires, en développant seulement les propriétés et démonstrations que nous croyons nouvelles.

Sur un cercle fixe ω, de rayon r, soit A un point fixe; deux points mobiles B et C, partant de A simultanément, se déplacent sur le cercle d'un mouvement uniforme, le premier dans le sens direct, l'autre dans le sens inverse, la vitesse du second étant double de celle du premier : *l'enveloppe* (H) *de la droite* BC *est une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Si m est le point commun à deux positions voisines BC et B'C' de la droite mobile, le triangle B'Cm est isoscèle : la limite de m, quand B'C' vient coïncider avec BC, est donc le point symétrique de C par rapport à B : *la droite* BC *touche son enveloppe au point* M *symétrique de* C *par rapport à* B (*fig.* 1).

Adoptant les unités d'arc et d'angle de la Trigonométrie, nous désignerons par 2φ la mesure de l'arc AB; faisant croître φ de zéro à π, nous obtiendrons (H) par points et tangentes : c'est une courbe fermée tangente au cercle ω en A, A_1, A_2, sommets d'un triangle équilatéral; ωA, ωA_1, ωA_2 sont des axes de symétrie et des tangentes de rebroussement, les points de rebroussement étant à une distance $3r$ de ω. Le point ω, centre ternaire, sera dit le *centre de la courbe ;* le cercle donné, le *cercle inscrit* ou le cercle tritangent à l'hypocycloïde; ces courbes ont leurs convexités opposées.

Fig. 1.



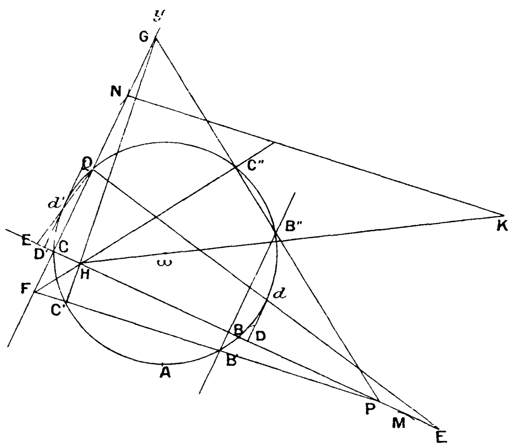
L'hypocycloïde n'a pas de point double ordinaire; la partie du plan qu'elle limite, et qui contient son centre, est dite *région intérieure;* toutes les H_3 (cette notation désignant toute hypocycloïde à trois rebroussements) sont des courbes semblables.

Dans la définition de (H), on peut remplacer la position initiale de la droite mobile, c'est-à-dire la tangente U'U en A au cercle ω, par une autre de ses positions, c'est-à-dire par une corde quelconque.

La courbe est aussi *l'enveloppe des droites sur lesquelles* U'U *et* ωA *déterminent des segments ayant leurs milieux sur le cercle;* dans cette définition, on peut substituer à U'U et ωA deux sécantes rectangulaires BC et CY se coupant sur le cercle; la courbe est tangente à ces sécantes aux points M et N symétriques de C par rapport aux seconds points où elles coupent le cercle.

2. *Classe et degré de* (H). — Il est manifeste que la droite mobile passe successivement, au moins une fois, par tout point du plan; soient BC l'une de ses positions quand elle passe par un point determiné P, CY la perpendiculaire en C à cette droite (*fig* 2); par P

Fig. 2.



passent autant de tangentes à (H) que de droites sur lesquelles CY et BC interceptent un segment ayant son milieu sur le cercle ω : ces droites s'obtiennent en joignant P aux points où la perpendiculaire à CP en son milieu coupe ω; il existe donc, outre PBC, au plus deux autres tangentes PB'C' et PB''C'', à (H), issues de P. D'ailleurs, toute tangente PBC faisant avec AB et U'U un triangle isoscèle ayant sa base sur U'U, on peut mener une tangente, et une seule, ayant une direction donnée. Par conséquent (H) *est une courbe de troisième classe*, *bitangente à la droite de l'infini.*

Elle coupe la droite BC aux points pour lesquels les deux tangentes autres que BC coïncident, et en ces points seulement, c'est-à-dire aux points E et E′ symétriques de C par rapport aux traces D et D′, sur BC, des tangentes à ω perpendiculaires à BC; si d et d' sont les points où ces tangentes touchent le cercle, les tangentes à (H) en E et E′ sont Ed et E′d' ; elles sont rectangulaires et se coupent en Q sur le cercle ω et sur CY.

Nous voyons que, des tangentes issues de Q, deux sont perpendiculaires; comme il n'existe qu'une seule tangente perpendiculaire à une tangente donnée, *le cercle* ω *est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à* (H).

Nous pouvons ainsi énoncer ce théorème : *Toute corde* EE′ *tangente à* (H) *est égale à* $4r$; *son milieu est sur le cercle* ω, *à égale distance de son point de contact* M *et du second point* C *où elle coupe le cercle; les tangentes en* E *et* E′ *sont rectangulaires, et se coupent en un point* Q *de* ω; QC *est perpendiculaire à* EE′, *et touche* (H) *en* N, *symétrique de* C *par rapport à* Q. La droite MN, joignant les points de contact de deux tangentes rectangulaires, est tangente à (H).

Les normales à (H) en M, E et E′ se coupent au point symétrique de Q par rapport à B, c'est-à-dire sur le cercle des rebroussements.

Il existe une normale à (H), et une seule, parallèle à une tangente donnée CBM : c'est la normale en N; elle est inversement homothétique de la tangente par rapport à ω, le rapport d'homothétie étant 3. La développée de (H) est donc une H_3 inversement homothétique de (H), par rapport à ω, dans ce même rapport.

Si ωM coupe en ν la normale en N, ν est le centre de courbure en N, et l'on verrait très aisément que le rayon de courbure $N\nu$ vaut huit fois la distance de ω à la tangente en N; nous trouverons autrement ces résultats.

Toute tangente à (H) coupant la courbe en deux points, *l'hypocycloïde est du quatrième degré*, comme il résulte de la formule de Cayley

$$3m + i = 3n + r,$$

où m désigne le degré, n la classe, i le nombre des tangentes stationnaires, r celui des points de rebroussement.

3. Voici d'autres conséquences de la figure 2 : B' et B'' étant les milieux des deux tangentes $PB'C'$ et $PB''C''$, nous pouvons dire que si trois cordes tangentes passent en un même point P, *chacune d'elles est perpendiculaire à la droite qui joint les milieux des deux autres.*

Le cercle $PB'B''$, symétrique du cercle ω par rapport à $B'B''$, lui est égal; donc *le cercle qui passe aux milieux de deux cordes tangentes et en leur point commun est égal au cercle inscrit dans* (H).

Si P se déplace de manière que l'angle $\widehat{B'PB''}$ de deux tangentes issues de ce point conserve une valeur constante, C symétrique de P par rapport à $B'B''$, restant sur le cercle, $B'B''$ reste constant, d'où ce théorème : *Si un angle de grandeur constante se déplace en s'appuyant par ses deux côtés sur une* H_3, *la droite qui joint les milieux des cordes déterminées par la courbe sur les côtés a une longueur constante, le centre du cercle passant au point commun aux cordes et en leurs milieux décrit un cercle de centre* ω. La distance des points où les côtés de l'angle sont coupés par les tangentes qui leur sont respectivement perpendiculaires est aussi constante.

Supposons (*fig.* 2) que P se déplace sur la tangente CB, la bissectrice de l'angle $\widehat{B'CB''}$ reste fixe, celle de $\widehat{B'PB''}$, symétrique de la précédente par rapport à $B'B''$, conserve donc une direction invariable. Ainsi, *les deux tangentes à une* H_3, *issues d'un point mobile d'une tangente fixe, et autres que celle-ci, font des angles dont les bissectrices ont des directions fixes;* ces directions sont celles des tangentes aux points où la tangente fixe coupe la courbe. On en conclut que la somme des angles de ces tangentes variables avec la tangente fixe est constante, puis que la somme des angles de ces trois tangentes avec une droite fixe est constante.

On étend de suite le théorème au cas où le point se déplace arbitrairement, et l'on a cette importante proposition :

La somme des angles que font avec une droite fixe les trois tangentes issues d'un point quelconque est constante.

M. G. Humbert a déduit cette propriété d'un théorème sur les courbes ayant tous leurs foyers à l'infini, et en a tiré d'intéressantes conséquences (*Nouv. Ann.*, 1893).

Si la droite fixe est la tangente $U'U$ au sommet A de l'hypocycloïde, et si nous appelons α, β, γ les angles des trois tangentes issues d'un point quelconque avec la direction $U'U$, nous trouverons, en considérant une position particulière du point, A par exemple,

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{\pi}{2},$$

le signe $\equiv$ voulant dire : égale à $k\pi$ près (k entier).

Sous cette forme, le théorème avait été énoncé par Laguerre (*Nouv. Ann.*, 1870); sa réciproque est vraie.

4. Tout point d'une H_3 et la tangente en ce point sont déterminés par l'angle que fait cette tangente avec la tangente U'U en un sommet; nous pourrons désigner par la notation φ la tangente correspondant à l'angle φ, que nous pourrons supposer compris entre zéro et π.

Nous appellerons tangente *adjointe* à une tangente donnée α la tangente α', différente de α, issue du point de contact de celle-ci; α et α' sont liés par la relation

$$(1) \qquad 2\alpha + \alpha' \equiv \frac{\pi}{2}.$$

Si trois tangentes α, β, γ *ont un point commun* P, *leurs tangentes adjointes* α', β', γ' *ont aussi un point commun* P'; cette propriété, commune à toutes les courbes de troisième classe, peut s'établir comme il suit : par hypothèse, on a

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{\pi}{2},$$

$$2\alpha + \alpha' \equiv 2\beta + \beta' = 2\gamma + \gamma' \equiv \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\alpha' + \beta' + \gamma' \equiv \frac{\pi}{2};$$

par suite, à cause de la réciproque du théorème de Laguerre, les tangentes α', β', γ' concourent.

Nous verrons plus tard comment P' se déduit géométriquement de P.

De la relation (1) résulte que la tangente α' adjointe à la tangente α, l'est aussi à la tangente $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ perpendiculaire à α; on retrouve que les tangentes aux extrémités d'une corde tangente sont rectangulaires; on retrouverait aussi que la troisième tangente issue du point commun à ces tangentes rectangulaires est perpendiculaire à la corde; mais nous verrons plus loin d'autres applications du théorème de Laguerre.

5. Revenant à la figure 2, nous observons que le cercle ω, passant au pied C d'une hauteur du triangle PFG et aux milieux B' et B'' de deux côtés, est le cercle des neuf points de ce triangle formé par la tangente CY et les deux tangentes autres que BC issues de P; le rayon du cercle O circonscrit à ce triangle égale $2r$; les autres hauteurs FC'' et GC' sont aussi tangentes à l'hypocycloïde (2); soit H leur point commun.

Les points de contact, avec (H), des côtés, étant les symétriques de C, C', C'' par rapport à Q, B' et B'' respectivement, les normales en ces points concourent au point K symétrique de H par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle, c'est-à-dire donné par $\overline{\omega K} = -3\overline{\omega H}$.

Nous étudierons plus loin les triangles circonscrits tels que PFG et nous verrons en particulier que l'hypocycloïde est l'enveloppe des droites de Simson pour chacun d'eux.

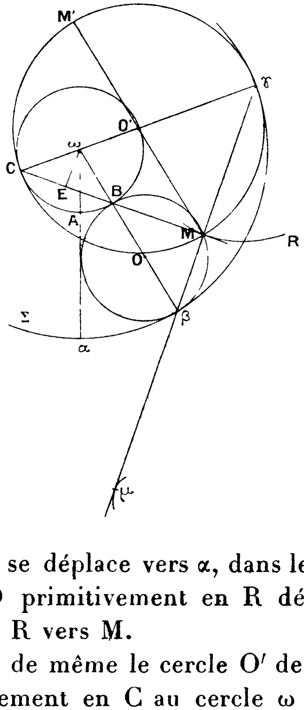
6. *Génération de* (H) *par roulement d'un cercle.* — Traçons le cercle O tangent en B au cercle ω et égal à ce cercle (*fig.* 3), il passe en M; soit Σ le cercle de centre ω, de rayon $3r$, qui touche O en β sur ωBO, et coupe ωA en α; soit, dans le sens direct, R le point de Σ tel que : mesure de $\widehat{\alpha R} = \frac{\pi}{3}$, R est un point de

rebroussement de (H). Nous pouvons supposer $\varphi < \frac{\pi}{6}$, φ désignant la moitié de la mesure de l'arc $\widehat{AB}$, et nous avons

$$\text{mesure de } \widehat{\beta R} = \frac{1}{3} \text{ mesure de } \widehat{\beta M} = \frac{\pi}{2} - 2\varphi.$$

Ces arcs sont donc équivalents, et si le cercle O roule sur le cercle Σ de manière que le point de contact,

Fig. 3.



d'abord en R, se déplace vers α, dans le sens inverse, le point de O primitivement en R décrit l'hypocycloïde (H), de R vers M.

Considérant de même le cercle O' de rayon $2r$ tangent intérieurement en C au cercle ω et touchant Σ en γ, nous verrions que ce cercle passe en M, que les points β, M, γ sont en ligne droite, et que les arcs γM et γR sont équivalents et ont une longueur double de celle des arcs βM et βR; si le cercle O′ roule sur Σ de manière que le point de contact, d'abord en R, se déplace sur Σ dans le sens direct, le point de O′ primitivement en R décrit aussi la courbe (H), de R vers M. Le diamètre MO′M′ enveloppe cette courbe, et le point M′ la décrit.

7. *Développée de* (H). — L'arc Rγ étant double de l'arc Rβ, la droite $\beta\gamma$, normale à (H) en M, enveloppe une H_3 touchant en R le cercle Σ et tritangente à ce cercle; le centre de courbure μ de (H) en M est symétrique de γ par rapport à β; et si ωE est la distance de ω à la tangente CBM en M, la figure 3 donne

$$M\mu = \beta M + \beta\mu = \beta M + \beta\gamma = 4\beta M = 8\omega E,$$
$$\frac{\mu\beta}{\mu\gamma} = \frac{1}{2} = \frac{M\beta}{M\gamma}.$$

Ainsi *le point* M *de* (H) *et le centre de courbure* μ *en ce point sont conjugués par rapport au cercle des rebroussements* Σ; *le rayon de courbure vaut huit fois la distance de* ω *à la tangente en* M; *la développée est une* H_3 *tangente à* Σ *aux points de rebroussement de* (H), *c'est-à-dire inversement homothétique de* (H) *par rapport à* ω, *le rapport d'homothétie étant* 3.

8. *Aire de* (H). — *m* désignant le point commun aux deux positions infiniment voisines BC et B′C′ de la droite mobile qui enveloppe (H), nous pouvons écrire (*fig.* 1), aux infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$\text{aire } m\,BB' = \frac{1}{4}\text{aire } m\,CC' = \frac{1}{3}\text{aire } BB'C'C.$$

Si donc B_1 est le point du cercle ω tel que $\widehat{AB_1} = \frac{\pi}{3}$, et R le point de rebroussement de (H) correspondant

$$\text{aire } AB_1R = \frac{\pi r^2}{6},$$

d'où il suit que *l'aire de la courbe est double de l'aire du cercle inscrit.*

Longueur de (H). — Soient 2φ et $2(\varphi + \Delta\varphi)$ les mesures des arcs AB et AB′, φ pouvant être supposé $< \frac{\pi}{6}$, et $\Delta\varphi > 0$; D, D′ les traces de BC et B′C′ sur U′U, M et M′ les points de contact de ces tangentes (*fig.* 1), m leur point commun; on a sans peine

$$BD < BM < Bm, \quad \text{et} \quad B'D' < B'm < B'M',$$

ce qui montre que la convexité de la courbe est bien opposée à celle du cercle, et l'on obtient

$$\begin{aligned} mM &= 4r\sin\Delta\varphi\cos(3\varphi + \Delta\varphi), \\ mM' &= 4r\sin\Delta\varphi\cos(3\varphi + 2\Delta\varphi), \end{aligned}$$

$mM = mM'$ aux infiniment petits du second ordre près, et l'on a avec la même approximation

$$\text{arc } MM' = 2mM = 8r\sin\Delta\varphi\cos(3\varphi + \Delta\varphi),$$

d'où

$$\text{arc } AR = 8r\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3\varphi\, d\varphi = \frac{8r}{3}.$$

La longueur de la courbe (H) *est donc égale à* $16r$.

Autrement : si R′ est le centre de courbure en A, comme le rayon de courbure en R est nul, l'arc RR′ de la développée équivaut au rayon de courbure en A, c'est-à-dire à $8r$, et l'arc AR de (H), qui vaut le tiers du précédent, a pour longueur $\frac{8r}{3}$.

9. *Parabole osculatrice.* — Une parabole et une H_3 ont six tangentes communes, la droite de l'infini comptant pour deux; la parabole osculatrice en M est la parabole Π pour laquelle les tangentes communes à distance finie coïncident avec la tangente à (H) en M; elle est la limite de la parabole Π' tangente en M et M' à mM et mM' (*fig.* 1); la médiane mL de mMM' donne la direction des diamètres de Π'; posant

$$\alpha = \mathrm{L}\widehat{m}\mathrm{M}, \qquad \alpha' = \mathrm{L}\widehat{m}\mathrm{M}',$$

nous avons

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{m\mathrm{M}}{m\mathrm{M}'},$$

d'où nous déduisons, en tenant compte des expressions de mM, mM' (8),

$$\frac{\operatorname{tang}\dfrac{\alpha'-\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\dfrac{\alpha'+\alpha}{2}} = \operatorname{tang}\left(3\varphi + \frac{3\Delta\varphi}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{\Delta\varphi}{2},$$

ou, en remarquant que

$$\frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha'-\alpha}{2} = \operatorname{tang}\left(3\varphi + \frac{3\Delta\varphi}{2}\right),$$

d'où

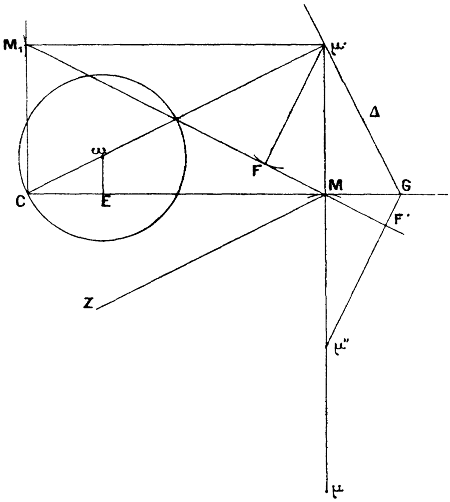
$$\lim\frac{\alpha'-\alpha}{2} = 3\varphi + k\pi \qquad (k \text{ entier})$$

et facilement

$$\lim\alpha \equiv \frac{\pi}{2} - 3\varphi.$$

Nous concluons de là que *le diamètre* MZ *de* Π *est parallèle à* ωC. Construisons la directrice : cette parabole ayant même centre de courbure μ que (H) au point M, si nous prolongeons μM d'une longueur $M\mu' = \frac{M\mu}{2}$ (*fig.* 4), μ' est sur la directrice de Π.

Fig. 4.



Comme $M\mu' = 4\omega E$, ωE distance de ω à la tangente MBC, μ' est sur $C\omega$; la directrice Δ est la perpendiculaire en ce point à $C\omega$.

Si CM_1 est la tangente à (H) perpendiculaire à CM, la projection F de μ' sur MM_1 est le point où cette droite touche (H); μ' est le point de concours des normales en M, M_1 et F.

La tangente en M à Π coupant la directrice en G, et MM_1 étant symétrique du diamètre MZ par rapport à la tangente, le foyer de Π est la projection F' de G sur MM_1.

$\mu'F$ et GF' sont parallèles à la médiane du triangle rectangle $\mu'MG$ issue de M, donc $MF' = MF$, et l'on a ce théorème énoncé par Laguerre (*Nouv. Ann.*, 1870) :

Si F *est le point où une* H_3 *est touchée par la tangente adjointe à la tangente en* M, *le symétrique* F′ *de* F *par rapport à* M *est le foyer de la parabole qui a en* M *un contact du troisième ordre avec l'hypocycloïde.*

Nous venons de voir aussi que *ce foyer* F′ *est la projection, sur la tangente* MF, *du milieu* μ'' *du rayon de courbure; le symétrique de ce milieu, par rapport à* M, *est sur le cercle des rebroussements* Σ, *et la tangente en ce point à ce cercle est la directrice de la parabole.*

Énonçons aussi ces propriétés faciles à obtenir : *les paraboles osculatrices aux extrémités d'une corde tangente ont même directrice; leur corde commune touche l'hypocycloïde; la distance de leurs foyers est égale à* $8r$; *ces foyers et celui de la parabole osculatrice au point de contact* F *de la corde déterminent un cercle qui passe au deuxième point où l'autre tangente issue de* F *coupe l'hypocycloïde.*

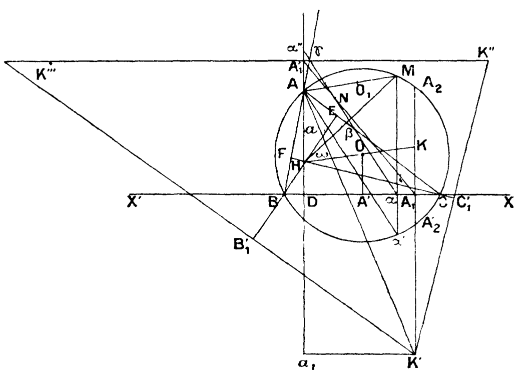
Hypocycloide a trois rebroussements considérée comme enveloppe des droites de Simson d'un triangle.

10. Soit M un point du cercle O circonscrit à un triangle ABC; α, β, γ ses projections sur les côtés; Δ la droite qui joint ces points; H l'orthocentre du triangle, A′, B′, C′ les milieux des côtés; D, E, F les pieds des hauteurs; le milieu N de HM est sur Δ; il est aussi le milieu du segment $\alpha\alpha''$ déterminé sur Δ par BC et la hauteur correspondante, et des segments analogues $\beta\beta''$ et $\gamma\gamma''$. Ce point N est sur le cercle des neuf points, dont nous appellerons ω le centre.

Réciproquement, la droite qui passe en N, et qui coupe BC et AD en des points équidistants de N, étant unique, est $\alpha\alpha''$, c'est-à-dire la droite de Simson relative à M; nous sommes ramenés à un mode de génération de l'hypocycloïde (1) : Δ *enveloppe une* H_3 *tritangente au cercle des neuf points du triangle.*

Cette courbe *touche les côtés et les hauteurs du triangle :* les côtés aux points A_1, B_1, C_1, symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux milieux des côtés auxquels ils appartiennent; les hauteurs aux points A'_1, B'_1, C'_1 symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux milieux a, b, c de HA, HB, HC (*fig.* 5).

Fig. 5.



$A_1A'_1$, parallèle à $A'a$ et à OA, est tangente à l'hypocycloïde; de même $B_1B'_1$ et $C_1C'_1$.

Les *sommets* de l'hypocycloïde, c'est-à-dire les points où elle touche le cercle des neuf points du triangle, sont les points situés au tiers des arcs A'D, B'E, C'F, à partir des milieux des côtés.

11. *Une* H_3 *quelconque peut d'une infinité de manières être considérée comme l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle :* soit en effet une hypocy-

cloïde (H), considérons un triangle quelconque ayant un cercle des neuf points égal au cercle inscrit dans (H); l'enveloppe des droites de Simson de ce triangle est une H_3 égale à (H); si l'on fait coïncider ces deux courbes, le triangle auxiliaire devient un triangle circonscrit à (H), dont cette hypocycloïde est précisément l'enveloppe des droites de Simson. Nous appellerons ces triangles les triangles T de l'hypocycloïde (H) : *leurs cercles circonscrits sont tous égaux, leurs côtés et leurs hauteurs sont tangents à* (H), *ils ont tous pour cercle des neuf points le cercle tritangent à* (H).

Ce mode de génération permettrait de retrouver les propriétés principales de l'hypocycloïde; en particulier, on verrait que la somme des angles que font, avec un côté BC d'un triangle, les deux droites de Simson passant par un point de ce côté, est indépendante de ce point, d'où l'on déduirait le théorème de M. G. Humbert (3).

12. *Une* H_3 *tangente aux côtés et à une hauteur* AD *d'un triangle* ABC *touche les deux autres hauteurs, et le triangle est pour cette courbe un triangle* T : Si BE′ est la troisième tangente issue de B, on a, d'après le théorème de M. Humbert, CX étant le prolongement de BC,

$$\widehat{ACX} - \widehat{ABX} + \widehat{ADX} \equiv \widehat{ABC} + \widehat{E'BX},$$

d'où

$$\widehat{E'BX} \equiv \frac{\pi}{2} - G,$$

A, B, C désignant les mesures en radians des angles du triangle. Donc BE′ coïncide avec la hauteur BE, et l'hypocycloïde est bien tangente aux deux autres hauteurs du triangle.

L'enveloppe des droites de Simson de ABC a alors même cercle inscrit que cette H_3, car celui de cette courbe passe en D, E, F, sommets d'angles droits circonscrits, mêmes points de contact avec les côtés et avec le cercle inscrit; cette enveloppe coïncide donc avec la courbe donnée, pour laquelle ABC est bien alors un triangle T : ainsi tout triangle circonscrit à une H_3, dont une hauteur touche la courbe, est un triangle T; nous avons déjà rencontré de tels triangles (5).

Il suffit donc, *pour obtenir un triangle* T, de mener d'un point trois tangentes à l'hypocycloïde et d'adjoindre à deux d'entre elles la tangente perpendiculaire à la troisième; il existe trois triangles T : ABC, ABH, ACH, ayant un sommet en A. Si A est intérieur au cercle tritangent, ces trois triangles sont obtusangles: s'il est extérieur, un est acutangle; s'il est sur le cercle, deux des triangles se réduisent à des segments de droite, et le troisième, qui est rectangle, a ses sommets autres que A sur la courbe.

On peut encore observer qu'un triangle T est acutangle, rectangle ou obtusangle, suivant que son orthocentre H est intérieur au cercle circonscrit O, est sur ce cercle ou extérieur, c'est-à-dire suivant que $OH \lesseqgtr 2r$, r désignant le rayon du cercle ω inscrit dans l'hypocycloïde; ou suivant que $O\omega \lesseqgtr r$, c'est-à-dire *suivant que le centre du cercle circonscrit au triangle* T *est intérieur au cercle inscrit dans l'hypocycloïde, est sur ce cercle ou extérieur.*

Du théorème de Laguerre (3) et de ce qui précède il résulte que :

Pour que trois tangentes α, β, γ *forment un triangle* T, *il faut et il suffit que* $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0$ (à $k\pi$ près, k entier).

13. Si un point A se déplace sur une tangente fixe AD, les deux autres tangentes issues de A forment avec la tangente X′DX perpendiculaire à AD (*fig.* 5) un triangle T, dont *le côté* BC *a son milieu* A′ *fixe* sur le cercle ω inscrit dans l'hypocycloïde, puisque ω est le cercle des neuf points de ABC. AO, parallèle à $a\omega$, a une direction fixe; comme $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$, *la bissectrice de l'angle* $\widehat{BAC}$, *quand* A *se déplace sur* AD, *a une direction invariable.*

La considération des triangles T conduit à une foule d'autres propriétés, dont nous donnerons les principales.

14. Tout point H intérieur à une H_3 est l'orthocentre d'un triangle T formé par les tangentes perpendiculaires aux tangentes issues du point, et est intérieur au triangle ayant pour sommets les points de contact des tangentes; on en conclut que tout cercle de rayon $2r$ ayant son centre O à l'intérieur d'une H_3 est circonscrit à un triangle T et un seul.

La figure (5) donne :

$$HA'_1 = AD, \qquad HB'_1 = BE, \qquad HC'_1 = CF,$$
$$HA'_1.BC = HB'_1.CA = HC'_1.AB,$$

d'où

$$HA'_1 \sin \widehat{B'_1 HC'_1} = HB'_1 \sin \widehat{C'_1 HA'_1} = HC'_1 \sin \widehat{A'_1 HB'_1}.$$

Donc, *si d'un point on mène les tangentes à une* H_3, *les produits obtenus en multipliant la distance du point, au point de contact de chaque tangente, par le sinus de l'angle des deux autres tangentes, sont égaux.*

15. *Les normales à une* H_3 *aux points* A_1, B_1, C_1

où elle touche les côtés d'un triangle T *concourent en* K, *point de* HωO *tel que* $\overline{OK} = -\overline{OH}$, *ou* $\overline{\omega K} = -3\overline{\omega H}$; nous établirons plus loin la réciproque.

De même les normales aux points A_1, B'_1, C'_1 où la courbe touche le côté BC, et les hauteurs BE et CF, concourent au point K' de ωA tel que $\overline{\omega K'} = -3\overline{\omega A}$, car HBC est un triangle T ayant A pour orthocentre. K'' et K''' désignant les deux autres points analogues, le triangle K'K''K''' est inversement homothétique, dans le rapport 3, du triangle ABC, par rapport au centre ω de l'hypocycloïde; K est l'orthocentre de ce triangle.

Le centre de gravité G de ABC est sur HO, et l'on a $\overline{\omega H} = -3\overline{\omega G}$, de sorte que H est le centre de gravité de K'K''K'''. On a donc ce théorème :

Si d'un point H *on mène les tangentes à une* H_3, *les normales aux points de contact forment un triangle dont le cercle circonscrit a pour rayon* $6r$; *le centre de gravité de ce triangle est le point* H; *son orthocentre est le point* K *de* Hω *donné par*

$$\overline{\omega K} = -3\overline{\omega H}.$$

16. Traçons le cercle $HB'_1C'_1$ qui coupe HA'_1 en a_1, projection de K' sur HA'_1, et qui passe en K'; H étant le centre de gravité de K'K''K''', on a $\overline{Ha_1} = -2\overline{HA'_1}$; et puisque $K'a_1$ est parallèle à K''K''', le faisceau $(K', a_1 HB'_1 C'_1)$ est harmonique; de là ce théorème énoncé par Laguerre (*Nouv. Ann.*, 1870) : *Si d'un point* H *on mène à une* H_3 *trois tangentes dont les points de contact sont* A'_1, B'_1, C'_1, *et si sur* HA'_1 *on prend* a_1 *tel que* $\overline{Ha_1} = -2\overline{HA'_1}$, *les points* a_1, H, B'_1, C'_1 *appartiennent à un cercle qu'ils divisent harmoniquement.*

Ce théorème, qu'on pouvait déduire de la propriété établie au n° **14**, permet de construire une H_3 tangente à deux droites données en deux points donnés. Il montre aussi que *les points de contact des tangentes réelles issues d'un point ne peuvent être en ligne droite.*

Concevons que H soit sur la courbe, deux des points de contact, B'_1 et C'_1 par exemple, coïncident avec H, le cercle $HB'_1C'_1$ devient le cercle décrit sur le rayon de courbure en H comme diamètre; ce cercle intercepte, d'après le théorème ci-dessus, sur HA'_1 la corde Ha_1 telle que $Ha_1 = -2\overline{HA'_1}$; nous retrouvons ainsi que *le cercle de courbure en* H *détermine, sur la deuxième tangente issue de* H, *une corde quadruple de* HA'_1 *et de sens contraire* (9).

17. La figure 5 donne encore

$$\frac{HB'_1}{HC'_1} = \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin \widehat{BHD}}{\sin \widehat{CHD}};$$

HA'_1 est donc le prolongement de la symédiane de $HB'_1C'_1$ partant de H : *Chaque tangente menée d'un point à une* H_3 *a une direction opposée à celle de la symédiane partant de ce point dans le triangle ayant pour sommets le point donné et les points de contact des deux autres tangentes.*

Prenons maintenant sur HB'_1 et HC'_1 deux points B_2 et C_2 tels que

$$HB'_1 . HB_2 = HC'_1 . HC_2.$$

HA'_1, symédiane pour le triangle $HB'_1C'_1$, est médiane pour HB_2C_2; d'où ce théorème signalé par M. G. Humbert (*Nouv. Ann.*, 1893) : *Si sur les trois tangentes issues de* H *on prend des points* A_2, B_2, C_2, *tels que* $HA_2.HA'_1 = HB_2.HB'_1 = HC_2.HC'_1$, *le point* H *est le centre de gravité du triangle* $A_2B_2C_2$.

18. Nous avons déjà vu que les tangentes adjointes de trois tangentes concourantes ont un point commun : les tangentes adjointes des tangentes issues de H, c'est-à-dire $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ passent donc en un même point P, que nous appellerons le *point adjoint* de H; *tout point* P *est le point adjoint de quatre points* A, B, C, H, *sommets de quatre triangles* T.

$A_1A'_1$, parallèle à OA et à $A'\omega a$, est perpendiculaire à EF, et, A' étant le milieu de DA_1, est symétrique, par rapport à ω, de la hauteur du triangle DEF issue de D; par suite P *est le point symétrique*, *par rapport à* ω, *de l'orthocentre de* DEF.

Les bissectrices des angles formés par $B_1PB'_1$ et $C_1PC'_1$ étant parallèles aux tangentes en A_1 et A'_1, nous avons cette proposition : *les bissectrices des angles formés par les tangentes issues d'un point* P *sont parallèles aux côtés et aux hauteurs d'un triangle* T *dont les sommets et l'orthocentre ont* P *pour point adjoint*.

19. Si $\alpha\beta\gamma$ est la droite de Simson de M (*fig.* 5), le centre O_1 du cercle $A\beta\gamma$ est le milieu de AM et se trouve sur le cercle de diamètre AO; l'orthocentre H_1 de $A\beta\gamma$ est sur la symétrique de AO_1 par rapport à la bissectrice de A, $\frac{AH_1}{AO_1}$ est égal à la valeur absolue de $2\cos A$, comme $\frac{AH}{AO}$; AHH_1 et AOO_1 sont inversement semblables, H_1 appartient au cercle de diamètre AH dont le centre a est sur le cercle ω; on peut énoncer ce théorème : *Deux tangentes fixes* AB *et* AC *d'une* H_3 *étant coupées par une tangente variable*

en γ et β, le lieu du centre du cercle $A\beta\gamma$ *est un cercle égal au cercle tritangent et ayant* AO *pour diamètre,* O *étant le centre du cercle circonscrit au triangle* T, ABC, *dont deux côtés appartiennent aux deux premières tangentes. Le lieu de l'orthocentre de* $A\beta\gamma$ *est le cercle de diamètre* AH, H *orthocentre de* ABC; *le centre de ce cercle est sur le cercle tritangent.*

20. Des propriétés des triangles T, on déduit encore aisément que les cercles tangents en A à la tangente AA'_1 et passant respectivement aux points de contact B_1 et C_1 des autres tangentes sont égaux; leur diamètre est égal au segment BC déterminé par AB_1 et AC_1 sur la tangente perpendiculaire à AA'_1.

Elles permettraient de retrouver la construction du centre de courbure en un point et de la parabole osculatrice : considérons en effet un triangle T ayant un angle obtus A, et touchant BC en A_1 et AC en M; le cercle tangent en M à AC, et passant en A_1, a pour limite le cercle osculateur en M quand, la tangente en M restant fixe, le point C vient coïncider avec M; dans les mêmes conditions la parabole touchant AC et BC en M et A_1 devient la parabole qui a en M un contact du troisième ordre avec l'hypocycloïde; cette remarque conduit sans peine aux résultats connus.

Enfin, en exprimant les divers éléments de la figure 5 en fonction de r et des angles α, β, γ que font avec U′U les côtés du triangle ABC, on aurait des formules d'où l'on déduirait diverses conséquences.

Droites de Simson généralisées.

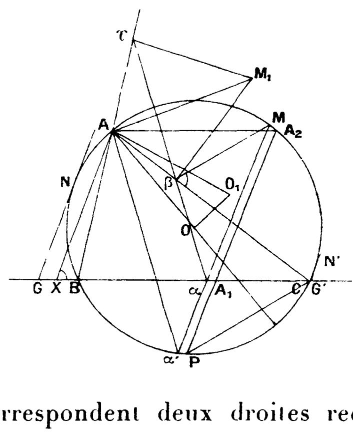
21. Énonçons d'abord les propriétés suivantes analogues à celles des droites de Simson :

I. AX, BY, CZ étant des droites qui font, avec les directions BC, CA, AB des côtés d'un triangle, un même angle θ, compté positivement dans le sens direct à partir des côtés, les projections α, β, γ, sur les côtés, parallèlement à ces droites, d'un point M du cercle circonscrit O appartiennent à une même droite, que nous nommerons la droite $\Delta(\theta)$ du point M; θ est compris entre zéro et π.

II. α', β', γ' étant les seconds points où $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ coupent la circonférence, les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sont parallèles à $\Delta(\theta)$; donc, θ étant donné, il existe une droite $\Delta(\theta)$, et une seule, de direction donnée.

III. Les droites relatives à deux points M et M_1 font un angle égal à $\widehat{MAM_1}$; à deux points diamétralement

Fig. 6.



opposés correspondent deux droites rectangulaires, dont le point commun décrit une circonférence.

IV. Par un point α de BC passent deux droites $\Delta(\theta)$, qui coïncident si α vient en G ou G', traces sur BC des tangentes au cercle O parallèles à AX; on a

$$GG' = \frac{2R}{\sin\theta},$$

R rayon du cercle (*fig.* 6).

V. $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ font, avec MA, MB, MC respectivement, des angles ayant même bissectrice.

VI. Étant donnés un triangle ABC et une transversale $\alpha\beta\gamma$, il existe un point M du cercle circonscrit, et un seul, pour lequel la droite est une $\Delta(\theta)$: il s'obtient en menant la corde $A\alpha'$ parallèle à la droite, et joignant $\alpha'\alpha$; c'est le foyer de la parabole inscrite au triangle et tangente à la transversale.

22. *Enveloppe des droites* $\Delta(\theta)$. — *Étant donnés un triangle* ABC *et* $\alpha\beta\gamma$ *la droite* $\Delta(\theta)$ *relative à un point* M *du cercle circonscrit* O, *il existe un triangle* AB_1C_1, *ayant ses sommets* B_1 *et* C_1 *sur* AB *et* AC, *pour lequel* $\Delta(\theta)$ *est une droite de Simson ordinaire;* θ *restant constant, ce triangle est invariable quand* M *parcourt le cercle* O, *d'où il suit qu'alors* $\Delta(\theta)$ *enveloppe une* H_3.

Soit M_1 le point qui se projette en β et γ sur AC et AB (*fig.* 6); $A\beta M\gamma$ et $A\beta M_1\gamma$ étant inscriptibles, les points A, M, M_1, β, γ sont sur le cercle de diamètre AM_1

$$\frac{AM}{\sin\widehat{A\beta M}} = AM_1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{AM_1}{AM} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Comme de plus $\widehat{MAM_1} = \widehat{M\beta M_1} = \frac{\pi}{2} - \theta$ (θ est supposé aigu), le lieu de M_1, quand M parcourt le cercle O, est un cercle O_1 obtenu en faisant tourner, dans le sens direct, d'un angle $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, un cercle homothétique de O, par rapport à A, dans le rapport $\frac{1}{\sin\theta}$; le centre O_1 est sur la perpendiculaire en O au diamètre AOA′ du cercle circonscrit, et l'on a $\widehat{OAO_1} = \frac{\pi}{2} - \theta$, dans le sens direct à partir de AO.

Le cercle O_1 coupe AB et AC en B_1 et C_1 : toute droite $\Delta(\theta)$ relative à ABC, θ conservant la même valeur, est une droite de Simson relative à AB_1C_1, et réciproquement; M parcourant le cercle O, $\Delta(\theta)$ enveloppe donc une H_3 tangente à AB_1, AC_1, B_1C_1, tangente par suite aux trois côtés du triangle primitif ABC, ce qu'on pouvait voir de suite. AX, BY, CZ, qui sont des $\Delta(\theta)$ particulières, sont tangentes à cette H_3, et l'on peut vérifier que B_1C_1 est perpendiculaire à AX. *Le triangle* AB_1C_1 *est un triangle* T *pour l'enveloppe de* $\Delta(\theta)$; ces résultats s'appliquent quand θ est obtus.

Toute H_3 *peut être considérée, inversement, comme l'enveloppe des droites* $\Delta(\theta)$ *relatives à un triangle quelconque qui lui est circonscrit; une tangente arbitraire, autre que les côtés du triangle, détermine* θ.

Il résulte de là que *quatre tangentes déterminent une* H_3.

23. Les troisièmes tangentes issues des sommets de ABC étant AX, BY, CZ, le triangle A′B′C′ qu'elles forment a ses angles égaux à ceux de ABC, d'où ce théorème : *Si des sommets d'un triangle circonscrit à une* H_3 *on mène les autres tangentes, leurs angles avec les côtés opposés ont une même valeur* θ, *et forment un triangle semblable au premier.*

Le rapport de similitude du second triangle $A'B'C'$ au premier ABC vaut $2\cos\theta$; l'orthocentre du premier est le centre du cercle circonscrit au second; les projections des côtés du premier sur les côtés correspondants du second sont égales à la moitié de ceux-ci.

Ce théorème, qui permettrait de retrouver celui du nº 3, a été établi autrement par M. G. Humbert, qui a appelé $A'B'C'$ le *triangle dérivé* du premier, et a démontré d'intéressantes propriétés des triangles dérivés successifs d'un triangle donné (*Nouv. Ann.*, 1893).

Nous nommerons *triangle* $T(\theta)$ d'une H_3 tout triangle circonscrit pour lequel cette courbe est l'enveloppe des droites $\Delta(\theta)$: la somme des angles des côtés d'un tel triangle, avec la tangente $U'U$ à la courbe en un de ses sommets, est égale à $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, à $k\pi$ près; et réciproquement tout triangle circonscrit pour lequel cette somme vaut $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ est un triangle $T(\theta)$.

θ étant donné, un point A intérieur à une H_3 est un sommet de trois triangles $T(\theta)$; les côtés opposés à ce sommet forment un triangle $T(3\theta)$.

24. *Points de contact des côtés de* ABC *avec l'enveloppe de* $\Delta(\theta)$. — La corde CP étant parallèle à BX, et A_1 étant la projection de P sur BC, faite parallèlement à AX, la droite $\Delta(\theta)$ de P est BC qui touche l'enveloppe en A_1; les triangles semblables PA_1C et PAB, PA_1B et PAC, donnent

$$\frac{A_1C}{AB}=\frac{PC}{PA},\qquad \frac{A_1B}{AC}=\frac{PB}{PA},$$

d'où

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{AC}{AB}\,\frac{PB}{PC}=\frac{b\sin(\theta-C)}{c\sin(\theta+B)},$$

a, b, c désignant les côtés du triangle; on s'assure que

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = -\frac{b\sin(\theta - C)}{c\sin(\theta + B)},$$

B_1 et C_1 étant les points de contact de CA et AB, pour que AA_1, BB_1, CC_1 concourent, il faut et il suffit que

$$\frac{\sin(\theta - C)\sin(\theta - A)\sin(\theta - B)}{\sin(\theta + B)\sin(\theta - C)\sin(\theta + A)} = +1$$

ou

$$\frac{(\tan\theta - \tan A)(\tan\theta - \tan B)(\tan\theta - \tan C)}{(\tan\theta + \tan A)(\tan\theta + \tan B)(\tan\theta + \tan C)} = +1,$$

relation vérifiée seulement pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: *pour que* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent, il faut et il suffit que* ABC *soit un triangle* T.

Un calcul simple montre que, pour que A_1, B_1, C_1 soient en ligne droite, il faut et il suffit que

$$\tan\theta = \sqrt{-1 - \frac{1}{\cos A \cos B \cos C}},$$

d'où l'on conclut que *les tangentes à une* H_3 *en trois points en ligne droite forment un triangle obtusangle.*

Remarquons que si A_2 est le deuxième point où PA_1 coupe le cercle O, AA_2A_1X est un parallélogramme, d'où la construction immédiate de A_1 si θ est connu, ou de l'angle θ si A_1 est donné.

25. La droite BC coupe l'enveloppe des droites $\Delta(\theta)$ aux points G et G′ (21); GG′ étant une corde tangente est égale à $4r$, r rayon du cercle tritangent à l'hypocycloïde; par suite : $R = 2r\sin\theta$ est la relation qui lie r, θ et le rayon R du cercle circonscrit à un triangle quelconque $T(\theta)$.

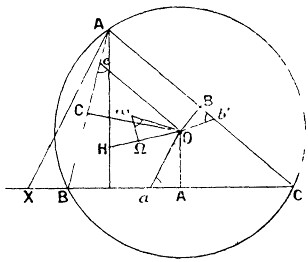
Le milieu a' de GG', projection de O sur BC faite parallèlement à AX, appartient au cercle tritangent ω; de même les points b' et c', projections de O sur CA et AB, faites parallèlement à BY et à CZ.

Le triangle $a'b'c'$, dont les côtés sont perpendiculaires à AX, BY, CZ (3), peut se déduire du triangle $A'B'C'$ ayant ses sommets aux milieux des côtés de ABC, par une homothétie et une rotation $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ dans le sens inverse, opposé au sens de θ; $a'b'c'$ est semblable à $A'B'C'$, dans le rapport

$$\frac{Oa'}{OA'} = \frac{1}{\sin\theta} \qquad (\textit{fig. } 7).$$

Le centre ω *de l'hypocycloïde*, centre du cercle $a'b'c'$, est homologue, dans la transformation ci-dessus,

Fig. 7.



du centre Ω du cercle $A'B'C'$; $\omega\Omega O$ est rectangle en Ω; ωO fait avec $\omega\Omega$, dans le sens direct, l'angle θ, et $\frac{O\omega}{O\Omega} = \frac{1}{\sin\theta}$. Comme Ω est le milieu de OH, on a aussi $\omega O = \omega H$. On peut énoncer le théorème suivant : *Les milieux des cordes d'une* H_3 *qui forment un triangle* $T(\theta)$ *sont les sommets d'un triangle semblable au premier, dans le rapport* $\frac{1}{2\sin\theta}$, *et qui* *a ses côtés perpendiculaires aux côtés du triangle dérivé du premier. Le centre de la courbe est équidistant de l'orthocentre* H *du triangle donné et du centre* O *du cercle circonscrit.*

On en conclut que *le lieu des centres des* H_3 *tangentes aux côtés d'un triangle est la perpendiculaire à* OH *en son milieu.*

26. Soit un triangle $T(\theta)$, ABC, le rayon R du cercle circonscrit est égal en valeur absolue à $2r\cos\sigma$, σ désignant la somme des angles de ses côtés avec U′U : si A′B′C′ est le triangle circonscrit $T(\theta')$ dont les côtés sont perpendiculaires à ceux du premier, on a pour ce triangle $\sigma' = \sigma + \frac{\pi}{2}$, le rayon R′ du cercle circonscrit est égal en valeur absolue à $2r\sin\sigma$; par conséquent

$$R^2 + R'^2 = 4r^2.$$

Appelant α, β, γ et α', β', γ' les angles avec U′U des côtés des deux triangles, nous avons

$$\beta' + \gamma' \equiv \beta + \gamma;$$

donc, d'après le théorème de Laguerre (3), les sommets A et A′ sont sur une même tangente : *si deux triangles circonscrits ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, ils ont le même triangle dérivé, et la somme des carrés des rayons des cercles circonscrits est égale à* $4r^2$.

M. Humbert montre que les deux premiers triangles seuls admettent le troisième pour triangle dérivé (*Nouv. Ann.*, 1893); ajoutons qu'ils ont *le même orthocentre* H, centre du cercle circonscrit à leur triangle dérivé commun, et que *les centres* O *et* O′ *de leurs cercles circonscrits sont symétriques par rapport au centre* ω *de l'hypocycloïde;* car $\omega O = \omega O' = \omega H$, et $\widehat{H\omega O} = 2\theta$, $\widehat{H\omega O'} = \pi - 2\theta$, ces angles étant de sens contraires.

27. Voici d'autres propriétés faciles à déduire de ce qui précède, et que nous nous bornerons à énoncer :

Parmi les triangles $T(\theta)$ d'une H_3, il en est trois, égaux entre eux, qui sont semblables à un triangle donné.

Nous avons vu que tout triangle $T(\theta)$ est inscrit dans un cercle de rayon $R = 2r\sin\theta$; les triangles formés par les troisièmes tangentes issues des sommets d'un triangle $T(\theta)$ d'une part, par les tangentes adjointes de ses côtés d'autre part, sont des triangles $T(\pi - 2\theta)$, par suite inscrits dans des cercles dont les rayons sont égaux à la valeur absolue R' de $2r\sin 2\theta$. Le second de ces triangles est semblable au triangle formé par les tangentes menées au cercle circonscrit au triangle $T(\theta)$ donné, en ses sommets, et ses côtés font avec les tangentes correspondantes un angle égal à θ.

Les normales aux points de contact des côtés du premier triangle donné $T(\theta)$ forment un triangle $T\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ pour la développée de l'hypocycloïde, le rayon R'' du cercle circonscrit à ce triangle est égal en valeur absolue à $6r\cos\theta$.

R, R', R'', r sont liés par les relations

$$9R^2 + R''^2 = 36r^2, \qquad RR'' = 3R'r.$$

Les triangles T sont les triangles circonscrits à une H_3 qui sont inscrits dans les plus grands cercles; pour ces triangles

$$R' = R'' = 0.$$

De toutes les H_3 tangentes aux côtés d'un triangle, la plus petite, c'est-à-dire celle pour laquelle le cercle inscrit est le plus petit, est l'enveloppe des droites de Simson du triangle. Les autres sont égales deux à deux, les centres de deux H_3 égales sont symétriques par rapport à la droite d'Euler du triangle, et les points où elles touchent un même côté symétriques par rapport au point de contact de ce côté avec l'hypocycloïde minima.

Si deux sommets d'un triangle $T(\theta)$ ont le même point adjoint (18), on a $\theta = \frac{\pi}{2}$ et le triangle est un triangle T.

Le rayon R du cercle circonscrit au triangle $T(\theta)$ formé par trois tangentes α, β, γ ayant la valeur absolue de $2r\sin\theta$, ou $2r\cos(\alpha + \beta + \gamma)$, cette valeur absolue devient celle de $2r\cos 3\alpha$, si $\alpha = \beta = \gamma$; or, il est facile de voir que la limite de ce rayon R est alors le quart du rayon de courbure, et l'on retrouve, pour ce rayon de courbure, l'expression résultant de la construction connue (7).

Des expressions des côtés et des angles d'un triangle $T(\theta)$, et des grandeurs qui s'y rattachent, en fonction de r, α, β, γ, on déduirait d'autres propositions.

28. Conservant les notations habituelles, nous avons

$$\overline{OH}^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C),$$
$$R = 2r\sin\theta;$$

d'où

$$\omega O = \omega H = \frac{OH}{2\sin\theta} = r\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}.$$

Donc *les centres des cercles circonscrits et les orthocentres des triangles semblables entre eux, et circonscrits à une* H_3, *sont sur une même circonférence de centre* ω.

Les triangles dérivés successifs de chacun de ces triangles font partie de cet ensemble de triangles semblables; mais en général de deux triangles semblables, l'un n'est pas un des dérivés de l'autre; si en effet σ désigne la somme des angles avec U'U des côtés d'un triangle T(θ)

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

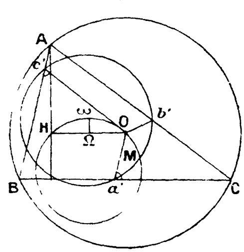
Pour les triangles dérivés successifs, les sommes analogues sont

$$\sigma' = \frac{\pi}{2} - 2\theta, \qquad \sigma'' = \frac{\pi}{2} - 4\theta, \qquad \ldots,$$

de sorte que, pour que de deux triangles semblables T(θ) et T(θ_1) le second soit l'un des dérivés du premier, il faut et il suffit que $\theta_1 \equiv (-2)^n \theta$, n entier.

29. *Enveloppe des cercles inscrits dans les* H_3 *tangentes à trois droites.* — Traçons le cercle OωH qui coupe en M le cercle $a'b'c'$ inscrit dans l'hypocycloïde

Fig. 8.



de centre ω (25) inscrite au triangle (*fig.* 8); le théorème de Ptolémée donne

$$\omega O(MH + MO) = M\omega \times OH,$$

ou

$$\frac{O\Omega}{\sin\theta}(MH + MO) = \frac{R}{2\sin\theta} \times OH,$$

ou

$$MH + MO = R.$$

Comme $M\omega$ est bissectrice de $\widehat{HMO}$, le cercle $a'b'c'$ touche en M l'ellipse de foyers H et O, et dont l'axe focal égale R, c'est-à-dire *l'ellipse d'Euler du triangle*, qui est ainsi l'enveloppe des cercles ω inscrits dans les H_3 tangentes aux côtés du triangle. Ce théorème a été obtenu autrement, ainsi que l'égalité de ωO et ωH, par M. Bickart (*Revue de Mathématiques spéciales*, 1908).

On en conclut que *les ellipses d'Euler des quatre triangles formés par quatre droites sont bitangentes à un même cercle*, qui a son centre sur leur axe non focal, le cercle inscrit dans l'hypocycloïde tangente aux quatre droites. (*A suivre.*)