

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13
(1913), p. 472-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__472_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

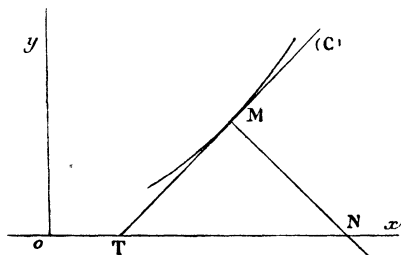
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — On donne deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy . Soient T



et N les points de rencontre de l'axe Ox avec la tangente de la normale en un point M à une courbe (C) située dans le plan des deux axes.

On demande de déterminer la courbe C de façon que le rayon de courbure en chaque point M de cette courbe soit égal à la longueur TN.

Démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce passant par un point donné du plan zOy , et tangentes en ce point à une droite donnée. Indiquer la forme de ces deux courbes.

1^e Deuxième question. — Soient $y = y_1(x)$, $z = z_1(x)$ un système particulier d'intégrales des équations (E)

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} = Ay + Bz, \quad \frac{dz}{dx} = Cy + Dz,$$

où A, B, C, D sont des fonctions de la variable x . Démontrer que les équations (E) admettent un autre système d'intégrales, distinct des premiers, représentées par des formules

$$y_2 = \frac{f(x)}{y_1} + y_1 \int_{x_0}^x \left[\frac{\varphi(x)}{y_1^2} + \frac{\psi(x)}{z_1^2} \right] dx,$$

$$z_2 = -\frac{f(x)}{y_1} + z_1 \int_{x_0}^x \left[\frac{\varphi(x)}{y_1^2} + \frac{\psi(x)}{z_1^2} \right] dx,$$

les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ne dépendant que des coefficients A, B, C, D.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^m - 1} dx,$$

m étant un nombre entier positif supérieur à 3.

Cas particulier où $m = 4, 5, 6$.

(Octobre 1911.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Étude des intégrales d'une équation différentielle linéaire au voisinage d'un point singulier.

II. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2-1} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{2x}{x^2-1} \frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

1° Montrer que cette équation admet une infinité de solutions de la forme

$$t = uvw,$$

u étant une fonction de la seule variable x , v une fonction (transcendante) de la seule variable y , w une fonction (transcendante) de la seule variable z , et v et w satisfaisant respectivement aux équations linéaires

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + m^2 v = 0, \quad \frac{d^2 w}{dz^2} - k^2 w = 0 \quad (m \text{ et } k \text{ constantes}).$$

2° Montrer que u est alors solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Cette équation a deux points singuliers à distance finie. Étudier la forme des intégrales u au voisinage de ces points.

III. 1° Développer la fonction $y = \frac{1}{x}$ en série trigonométrique dans l'intervalle $-\pi, +\pi$.

2° Trouver la somme de la série

$$\cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \dots \quad \text{pour} \quad -\pi < x < \pi,$$

et démontrer que cette série converge seulement pour les valeurs réelles de x .

1 ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Intégrer l'équation aux différentielles totales

$$(zy + z) dx + (z - 2x) dy - (x + y) dz = 0.$$

II. Calculer, en appliquant la méthode des résidus, l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2}.$$

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Appelant $F(x)$ une fonction

(475)

de x holomorphe dans un cercle S de centre a et désignant par t une quantité telle que l'inégalité

$$|t F(x)| < |x - a|$$

soit satisfaite en tous les points du contour de S , démontrer que l'équation en x

$$x = a + t F(x)$$

a une racine et une seule à l'intérieur de S .

II. Désignant par y la racine de l'équation en x

$$x = 1 + t x^2$$

qui se réduit à l'unité pour $t = 0$, montrer que cette racine est une fonction continue de t au voisinage de $t = 0$, et que l'on a

$$y^n = 1 + n t + \frac{n(n+3)}{2!} t^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{3!} t^3 \\ + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4!} t^4 + \dots$$

tant que $|t| < \frac{1}{4}$.

III. Appelant $F(x)$ un produit de facteurs primaires de genre 3, et désignant par $1, \omega, \omega^2$ les racines cubiques de l'unité, montrer que

$$F(x) F(\omega x) F(\omega^2 x)$$

est une fonction entière de genre zéro de la variable x^3 . Donner un exemple.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x} - 1} dx.$$

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Définition des produits de facteurs primaires de genre p . Étudier la convergence de ces produits.

II. On considère une fonction réelle $F(z)$ nulle pour $z=0$ et holomorphe pour $|z| \leq 1$. Séparant dans z et F les parties réelles des parties imaginaires, on pose

$$F(z) = P + iQ,$$

Donnant à x une valeur réelle, fixe, moindre que 1, on séparera les parties réelles des parties imaginaires dans les intégrales

$$\int \frac{F(z)}{z-x} dz \quad \text{et} \quad \int \frac{F(z)}{1-zx} dz$$

le long du cercle C de rayon 1 qui a son centre à l'origine; et l'on démontrera que

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} Q(\cos \theta \sin \theta) d\theta = \pi F(x).$$

III. Démontrer que l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$y'' + 3yy' + y^3 = p(x),$$

où $p(x)$ est un polynome en x , est la dérivée logarithmique d'une fonction entière de x .

¹ ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Trouver une famille de surfaces du second ordre constituant une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad x^2 + z^2 = 2xzp + yzq.$$

2° Trouver une famille de surfaces du second ordre constituant une intégrale complète de l'équation

$$(2) \quad x^2 + z^2 = 2xzp + yzq + \frac{z^2 q^2}{y^2}.$$

3° Trouver une intégrale de l'équation (1) qui passe par la courbe

$$z = 0, \quad 4x^3 + y^4 = 0.$$

(Juin 1913.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Partie analytique. — *Le mouvement d'un point M, rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et ayant pour coordonnées semi-polaires r, θ , z, est défini par les équations différentielles*

$$\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(z^2 + a^2)^2}{a z^2} \quad (a \text{ constant})$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{r}{z} \frac{(a^2 - z^2)}{(a^2 + z^2)}$$

et par les coordonnées r_0 , θ_0 , z_0 de la position M_0 que le point mobile occupe à l'instant t_0 .

1° *Trouver la relation, en termes finis, entre r et z, puis la relation en termes finis entre t et z et simplifier cette dernière en posant*

$$z = a \tan \varphi.$$

2° *Si, dans les relations précédemment obtenues, on regarde t et t_0 comme des constantes, on définit une correspondance entre les points M_0 et M. Montrer que, à une courbe fermée (C_0) située dans un plan parallèle à xOy, correspond une courbe fermée (C) située aussi dans un plan parallèle à xOy et que les projections des courbes (C_0) et (C) sur xOy sont homothétiques par rapport au point O; trouver la relation entre les aires A_0 et A limitées par ces courbes.*

3° *Soient (S) la surface engendrée par la courbe (C), qui vient d'être définie, quand t varie de t_1 à t_2 ; (V) le volume limité par la surface (S) et par les plans qui contiennent (C) aux instants t_1 et t_2 . Calculer V en fonction de a, z_0 , A_0 , t_1 , t_2 .*

4° *Calculer $\frac{dr}{dt}$ en fonction de r et de z, puis les projections u, v, w de la vitesse du point M sur les axes Ox, Oy, Oz. Montrer que l'intégrale*

$$\int_{(\Gamma)} u \, dx + v \, dy + w \, dz,$$

prise le long d'une courbe fermée (Γ) située dans un plan parallèle à xOy , est nulle et que le flux du vecteur (u, v, w) à travers une surface fermée quelconque (Σ) est nul aussi.

[On appelle flux du vecteur (u, v, w) à travers une surface fermée (Σ) l'intégrale

$$\int \int_{(\Sigma)} (u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) d\sigma,$$

étendue à la surface Σ où $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ désignent les cosinus directeurs de la normale extérieure à (Σ) en un point de l'élément $d\sigma$.]

II. Partie géométrique. — On considère la surface réglée (Σ) engendrée par les normales principales d'une courbe gauche (Γ).

1° Exprimer, au moyen de l'arc s de (Γ) et de la longueur l portée sur la normale principale à partir du point M de la courbe (Γ), les coordonnées d'un point quelconque P de (Σ), le dS^2 de cette surface.

Former l'équation du plan tangent au même point, et vérifier que la normale à la surface (Σ) au point P peut s'obtenir en composant un vecteur égal à $1 - \frac{l}{R}$ parallèle à la binormale de (Γ) et un vecteur $\frac{l}{T}$ parallèle à la tangente de (Γ) au point M , R et T désignant suivant l'usage les rayons de courbure et de torsion de (Γ).

2° Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de (Σ); montrer que si l'on pose

$$R\rho = 1, \quad T\tau = 1, \quad l\lambda = 1,$$

l'intégration de l'équation différentielle obtenue pour λ considéré comme fonction de s se ramène à la quadrature

$$\int \frac{\tau \frac{d\rho}{ds} - \rho \frac{d\tau}{ds}}{2\tau^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbe (Γ) est ligne asymptotique de la surface (Σ).

ÉPREUVE PRATIQUE. — Si l'on désigne par δu le premier

membre de l'équation aux dérivées partielles

$$\delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 :$$

1° *Vérifier que l'on a*

$$\delta(\lambda U) = \lambda \delta U + U \delta \lambda + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y},$$

λ et U désignant des fonctions de x, y, z .

2° *Soit*

$$U = F(X, Y, Z),$$

X, Y, Z désignant des fonctions de x, y, z ; écrire le développement de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial z}$ ordonné suivant les dérivées de la fonction $F(x, y, z)$ par rapport aux variables X, Y, Z .

3° *Soient*

$$u = \lambda F(X, Y, Z)$$

et

$$X = \frac{x}{z}, \quad Y = \frac{y}{z}, \quad Z = \frac{-1}{z}, \quad \lambda = \frac{1}{z} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{4z}\right)};$$

vérifier que l'on a

$$\frac{1}{\lambda} \delta u \equiv \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{\partial F}{\partial Z} \right).$$

Déduire de là que, si l'on connaît une solution de l'équation $\delta u = 0$, on peut immédiatement obtenir une seconde solution de la même équation.

4° *Soit*

$$u = f(r, z) \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

pour que u soit une solution de l'équation $\delta u = 0$, on doit avoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Chercher une solution de l'équation $\delta u = 0$ qui soit de la forme

$$u = e^{A r^2 + B},$$

A et B étant des fonctions de z .

(Juin 1911.)