

Concours d'admission à l'École normale supérieure et aux bourses de licence en 1913

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13 (1913), p. 464-469

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__464_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1913.**

Composition de Mathématiques.

(Sciences. — I.)

PREMIÈRE COMPOSITION.

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy , Oz , on considère la surface (S) définie par l'équation

$$z = xy + x^3,$$

et la droite (D) définie par les équations

$$y = b, \quad z = c$$

où b et c sont deux constantes données, la seconde n'étant pas nulle. Dans tout ce qui suit cette droite (D) restera fixe.

1° Montrer que la surface (S) est réglée et trouver ses génératrices.

2° A chaque génératrice rectiligne (G) de la surface (S) on fait correspondre le plan (P) mené par la droite (D) et parallèle à la symétrique de (G) par rapport au plan xOy . Déterminer le lieu du point d'intersection de (G) et de (P), quand la droite (G) décrit la surface (S)

Montrer que ce lieu est une courbe (C) située sur une quadrique (Q) et déterminer cette quadrique.

3° Former l'équation du quatrième degré donnant les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) avec un plan donné par son équation

$$ux + vy + wz + s = 0.$$

Calculer les fonctions symétriques élémentaires des racines en fonction de u, v, w, s . En déduire la relation à laquelle doivent satisfaire les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4 , de quatre points de la courbe (C) pour que ces quatre points soient dans un même plan.

Cette relation sera utile dans la plupart des questions qui vont suivre.

4° Déduire de la relation précédente les relations auxquelles doivent satisfaire les abscisses x_1, x_2, x_3 de trois points de la courbe (C) pour que ces trois points soient en ligne droite.

Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C). Montrer que les droites qui coupent la courbe (C) en trois points engendrent l'une des familles de génératrices rectilignes de la quadrique (Q).

5° Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les plans osculateurs à la courbe (C) en trois points donnés se coupent sur la courbe (C) est que ces trois points soient en ligne droite.

6° Par un point quelconque M de la courbe (C) il passe deux plans jouissant de la propriété d'être tangents à la courbe (C) au point M et en un autre point (c'est-à-dire d'être bitangents à la courbe). Soient M' et M'' les seconds points de contact de ces

deux plans. Montrer qu'il existe un plan bitangent à la courbe (C) en M' et M'' .

A quelles relations doivent satisfaire les abscisses de trois points M , M' , M'' de la courbe (C) pour que deux quelconques d'entre eux soient les points de contact d'un plan bitangent à la courbe (C)?

7° Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points M , M' , M'' , de la courbe (C) satisfaisant aux conditions précédentes. Exprimer les coefficients de cette équation au moyen de l'abscisse ξ du quatrième point d'intersection μ de la courbe (C) avec le plan (Π) déterminé par les points M , M' , M'' .

Calculer, en fonction de ξ , les coefficients de l'équation du plan (Π) et les coordonnées du point de concours A des tangentes à la courbe (C) aux points M , M' , M'' . Ce point A sera dit le point associé au point μ de la courbe (C).

8° Montrer qu'il existe une infinité de quadriques, ne dépendant que de b et de c , par rapport auxquelles le point A est le pôle du plan (Π); déterminer ces quadriques et montrer que l'une d'elles est la quadrique (Q) déjà considérée.

Déterminer le lieu (Γ) du point A, ainsi que l'enveloppe du plan (Π), quand le point μ décrit la courbe (C).

9° A trois points quelconques en ligne droite μ_1 , μ_2 , μ_3 , pris sur la courbe (C), sont associés les trois sommets A_1 , A_2 , A_3 , d'un triangle inscrit dans la courbe (Γ). Déterminer, en supposant $b=0$, l'enveloppe des côtés de ce triangle quand la droite $\mu_1\mu_2\mu_3$ varie. Montrer que, dans la même hypothèse $b=0$, le cercle circonscrit de ce triangle $A_1A_2A_3$ passe par deux points fixes.

DEUXIÈME COMPOSITION.

On donne deux axes rectangulaires et l'on considère l'équation différentielle

$$y - 2xy' + y^2y'^3 = 0.$$

1° *Montrer que cette équation admet une infinité de courbes intégrales C, dont l'équation est de la forme $y^2 = f(x)$, $f(x)$ désignant un polynome en x . Écrire l'équation générale des courbes C; montrer que, par tout point du plan, il passe, soit une, soit trois courbes C, et déterminer la région du plan où doit se trouver le point pour que le nombre des courbes qui y passent soit égal à trois; déterminer le lieu des points tels que deux des courbes C qui passent par l'un d'eux soient orthogonales.*

2° *On donne le point A ($x = 0,5$; $y = 0$). Soit P celle des courbes C qui passe par A et tourne sa concavité vers la partie positive de l'axe Ox; soit B le point de la courbe P qui a pour ordonnée $\sqrt{6}$. Soit Q celle des courbes C passant par B et qui tourne sa concavité vers les x négatifs; soit enfin A' le point où cette courbe coupe l'axe Ox. Calculer l'aire limitée par les arcs de courbes AB, BA', et l'axe Ox.*

3° *Un point mobile, partant de A, parcourt successivement l'arc AB de P, puis l'arc BA' de Q. Son accélération tangentielle est constamment égale à sa vitesse, et sa vitesse initiale est égale à 1; au point B on supposera que la vitesse ne subit pas de changement de grandeur, mais seulement un changement de direction. Calculer à 0,1 près le temps mis par le mobile pour parcourir l'arc ABA'.*

4° *Au point B, l'accélération du mobile subit une*

discontinuité. Calculer par ses projections sur les deux axes de coordonnées la variation géométrique du vecteur-accélération au point B.

Composition de Mathématiques.

(Sciences. — II.)

1. *On considère dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy . Un point matériel M , de masse égale à 1, est mobile dans ce plan sous l'action d'une force (F) dont les projections X et Y sur les axes sont :*

$$X = x, \quad Y = y - 4x,$$

x et y désignant les coordonnées du point M .

1° *Former et intégrer les équations différentielles du mouvement du point M .*

2° *Déterminer le mouvement du point M en supposant qu'à l'origine du temps ses coordonnées sont $(\alpha, 0)$ et que sa vitesse a pour projections sur les axes $(-\alpha, 2\alpha)$. Construire la trajectoire (T) correspondant de ce mouvement.*

3° *Évaluer le temps mis par le mobile pour aller d'un point quelconque M de sa trajectoire (T) au point M' où la tangente à la trajectoire est parallèle au rayon vecteur OM .*

4° *Démontrer que l'hodographe du mouvement est une courbe homothétique de la trajectoire (T) et calculer à 0,01 près le rapport d'homothétie.*

5° *La trajectoire (T) passe par le point O . Évaluer, en fonction de l'abscisse du point M , l'aire limitée par l'arc de courbe OM et la corde OM , ainsi que le volume engendré par cette aire tournant autour de Oy .*

II. Évaluer à 0,01 près les intégrales

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 \cos x + 3}, \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 \cos x + 3)^2}.$$