

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13
(1913), p. 383-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__383_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2137.

(1909, p. 384)

En désignant par p un nombre premier, par a et b deux nombres premiers entre eux, le quotient de la division de $a^p - b^p$ par $a - b$ a tous ses diviseurs premiers de la forme $P = kp + 1$, à l'exception du diviseur p qu'il admet dans l'hypothèse $a - b = \text{mult. } p$, dans cette hypothèse seulement, et qu'il admet alors une seule fois ⁽¹⁾.

(G. F.)

2^e SOLUTION,

PAR L'AUTEUR.

Soit

$$a^p - b^p = (a - b) \times Q,$$
$$Q = a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + b^{p-1}.$$

Un diviseur premier de $a^p - b^p$ divise $a - b$, ou Q , ou les deux. Quels facteurs premiers peuvent diviser à la fois $a - b$ et Q ? Si l'on a

$$a - b = \text{mult. } P, \quad a = \text{mult. } P + b,$$

on aura

$$Q = \text{mult. } P + pb^{p-1};$$

P ne pourra être que p .

Ainsi les diviseurs premiers de Q autres que p sont les diviseurs premiers de $a^p - b^p$ qui ne divisent pas $a - b$; soit P un tel diviseur premier.

(¹) Cette dernière partie de l'énoncé est en défaut pour $p = 2$.

Les valeurs de n pour lesquelles $a^n - b^n$ est multiple de P sont les multiples de la plus petite d'entre elles; comme $a^p - b^p$ est multiple de P , sans que $a - b$ le soit, pour la plus petite valeur de n ; et comme $a^{p-1} - b^{p-1}$ est multiple de P d'après le théorème de Fermat, on a

$$P - 1 = \text{mult. } p.$$

C. Q. F. D.

Cherchons maintenant à quelle condition le quotient Q admet le diviseur p . Si l'on pose $a = b + h$, il vient

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(b+h)^p - b^p}{h} \\ &= pb^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} b^{p-2} h + \dots + pbh^{p-2} + h^{p-1}. \end{aligned}$$

Tous les termes du développement, sauf le dernier, ont des coefficients divisibles par p ; pour que Q admette le facteur p , il faut et il suffit que h , c'est-à-dire $a - b$, soit divisible par p . On a alors

$$\frac{Q}{p} = b^{p-1} + \dots + bh^{p-2} + \frac{h}{p} h^{p-1}.$$

Si l'on n'excepte pas le cas $p = 2$, on a

$$\frac{Q}{p} = \text{mult. } p + b^{p-1};$$

le quotient $\frac{Q}{p}$ n'admet donc plus le facteur p .

(Je rappelle que je suis arrivé au cas particulier $p = 3$ par des considérations différentes, qu'il semble difficile d'étendre au cas général.)

