

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13
(1913), p. 137-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__137_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2077.

(1907, p. 288.)

Un triangle ABC étant inscrit à une hyperbole équilatère, si DEF est le triangle pédal d'un point quelconque de la courbe, le point inverse du centre de la courbe par rapport au triangle DEF est le point à l'infini dans une direction fixe et cette direction est celle de la droite qui est la ligne inverse de la courbe par rapport au triangle ABC.

(G. FONTENÉ.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Nous démontrerons tout d'abord le théorème suivant :

Étant donnée une hyperbole équilatère Σ circonscrite à un triangle ABC, deux points P et P' de la courbe situés sur une même perpendiculaire à l'un des côtés du triangle ABC (au côté BC par exemple en un point E) les triangles DEF, DE'F', podaires des points P et P' par

rapport au triangle ABC sont tels que les angles FDE, F'DE' ont mêmes bissectrices.

On sait en effet que le triangle podaire d'un point P par rapport au triangle ABC est semblable au triangle antipodaire du point P, inverse par rapport à ABC. On déduit immédiatement que les bissectrices de l'angle BP_1C sont parallèles aux bissectrices de l'angle FDE.

Soit Δ la droite inverse de l'hyperbole équilatère Σ par rapport à ABC, il existe sur cette droite une infinité de couples de points M_1 et M'_1 tels que les bissectrices des angles $\widehat{BM_1C}$, $\widehat{BM'_1C}$ soient parallèles, car le lieu des points μ tels que les bissectrices de l'angle $\widehat{B\mu C}$ soient parallèles à une direction donnée est une hyperbole équilatère passant par B et C, ayant pour centre le milieu de BC et pour directions asymptotiques la parallèle et la perpendiculaire à la direction donnée. (C'est le lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction données menées aux coniques de foyers B et C.) Ces points M_1 et M'_1 forment d'ailleurs sur Δ une involution I_1 dont deux couples de points correspondants sont les points d'intersection α et β de Δ avec le cercle ABC, le centre O de ABC et le point O' d'intersection de Δ avec BC.

D'autre part à deux points P et P' de Σ situés sur une perpendiculaire à BC, correspondent sur Δ deux points inverses P_1 et P'_1 , intersections de Δ avec la conique C inverse de la droite PP'; or toutes les coniques analogues à C sont circonscrites au triangle ABC et passent par le point A' diamétralement opposé à A sur le cercle ABC.

Elles coupent par conséquent Δ en des points en involution. Deux couples de points de cette involution I sont les points α et β , O et O'.

Les deux involutions I et I_1 coïncident et le théorème est démontré.

Ceci posé, considérons un point P de l'hyperbole Σ ; la perpendiculaire abaissée de P sur AB coupe Σ en P'_1 , la perpendiculaire abaissée de P' sur AC coupe Σ en P'' , la perpendiculaire abaissée de P'' sur AB coupe Σ en P''' , etc. Les triangles podaires de ces P, P', P'', ... sont d'après le théorème précédent tels que l'inverse du centre ω de Σ (qui est commun à tous les cercles circonscrits à ces triangles) soit à

l'infini dans la même direction; comme ces points sont en nombre infini sur Σ , cette direction est la même quel que soit le point pris sur Σ pour déterminer un triangle podaire par rapport à ABC.

Reste à déterminer cette direction.

Nous considérons pour cela le triangle podaire de l'orthocentre H du triangle ABC; soient H' la projection de ce point sur BC, H'' l'intersection de AH avec le cercle ABC, M le quatrième point d'intersection de Σ avec le cercle ABC. Le centre de Σ est le milieu ω de HM et la direction cherchée est la symétrique par rapport à AH de $\omega H'$ ou de MH''. Si $\widehat{BAM} = \theta$, $\widehat{AMH''} = C + \theta$ et l'inverse de AM fait avec AH l'angle

$$\widehat{H'AM''} = \frac{\pi}{2} - (c + \theta).$$

La direction cherchée est par suite *perpendiculaire* à la droite Δ inverse de Σ par rapport à ABC *et non parallèle à cette droite comme le porte l'énoncé*.

Remarque. — La proposition précédente peut encore s'énoncer comme il suit :

Si un triangle ABC est inscrit dans une hyperbole équilatère Σ de centre ω , la droite de Simson du point ω par rapport au triangle podaire d'un point quelconque de la courbe par rapport au triangle ABC est parallèle à une direction fixe et cette direction est celle de l'inverse de Σ par rapport à ABC.

2084.

(1907, p. 327, 1911, p. 183.)

Étant donnés un tétraèdre orthocentrique ABCD et un point M de la sphère circonscrite, les parallèles à MA, MB, MC, MD menées par l'orthocentre H, rencontrent les plans des faces correspondantes en quatre points situés dans un même plan et ce plan partage le segment MH dans le rapport de 2 à 1.

(G. FONTENÉ.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. R. BOUVAIST.

Soit M' le point diamétralement opposé à M sur la sphère $ABCD$, soit Σ la sphère conjuguée au tétraèdre donné. Les droites conjuguées des droites AM' , BM' , CM' , DM' par rapport à la sphère Σ sont les intersections des faces du tétraèdre avec les plans menés par H perpendiculairement à AM'_1 , BM'_1 , CM'_1 , DM'_1 , plans qui contiennent les parallèles à AM , BM , CM , DM menées par H ; ces droites conjuguées sont dans le plan polaire de M' par rapport à Σ . Soit P l'intersection de ce plan polaire avec MM' , on a évidemment

$$HP \cdot HM' = HA \cdot HH_1 = \frac{1}{3} HM \cdot HM'$$

(H_1 étant la trace de la hauteur AH sur la face BCD), d'où

$$\frac{HP}{HM} = \frac{1}{3},$$

ce qui démontre la proposition.

2167.

(1910, p. 528.)

Soient dans un plan cinq droites concourant en un point O et sur chacune d'elles deux points (A_1, A_2) , (B_1, B_2) , (C_1, C_2) , (D_1, D_2) , (E_1, E_2) . On désigne par C_a la cubique passant par O et les points $B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$ et par C_b, C_c, C_d, C_e les cubiques analogues. La tangente en O à C_a coupe cette courbe au point a ; soient b, c, d, e les points analogues des cubiques C_b, C_c, C_d, C_e . Montrer que :

1° Les cinq cubiques considérées ont, en dehors de O , deux points communs P et Q .

2° Les points a, b, c, d, e sont sur la droite PQ .

(LETIERCE.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient Σ une quadrique quelconque, Δ une droite coupant Σ en ω et O et S un point de Δ : soient $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_d, \Delta_e$ cinq

droites passant par S et coupant Σ en $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2$. Soit S_a le cône du second ordre passant par $\Delta, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_d, \Delta_e$, soit σ_a la biquadratique d'intersection de ce cône avec Σ . Si nous prenons ω comme centre de projection, la projection conique de σ_a sur un plan π sera une cubique C_a passant par les points O, B₁ B₂, C₁ C₂, D₁ D₂, E₁ E₂, ces points étant les traces sur le plan π des droites $\omega O, \omega b_1, \omega b_2, \omega c_1, \omega c_2, \omega d_1, \omega d_2, \omega e_1, \omega e_2$. C_a passera en outre par les traces P et Q sur π des génératrices de Σ passant par ω , et la tangente à C_a en O rencontrera cette cubique au point a , trace sur π de la tangente à σ_a en ω ; a est donc sur PQ. Les cônes S_b, S_c, S_d, S_e nous donneront de même les biquadratiques $\sigma_b, \sigma_c, \sigma_d, \sigma_e$, dont les projections C_b, C_c, C_d, C_e sur π passeront par P et Q et telles que leurs tangentes en O les couperont sur PQ.

Autres solutions par M. KLUG.

2181.

(1911, p. 384.)

Trouver le lieu du centre d'un cercle inscrit à un triangle conjugué à une conique C, l'un des sommets du triangle variable étant fixe.

(N. ABRAMESCU.)

SOLUTION

Par M. THIÉ.

On sait que les cercles inscrits à un triangle conjugué à une hyperbole équilatère ont leurs centres sur cette courbe. Soient alors AMN l'un des triangles considérés, ayant un sommet fixe en A, et P la polaire du point A par rapport à C. Soit encore H l'hyperbole équilatère bitangente à C avec P pour corde de contact. Le triangle AMN est conjugué par rapport à H. On en conclut immédiatement que cette courbe constitue le lieu cherché.

Autres solutions par MM. BOUVAIST, L. KLUG et PARROD.

2183.

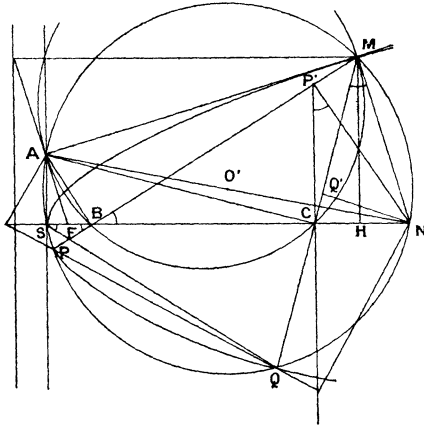
(1911, p. 480.)

Soient N le point où la normale au point M d'une parabole coupe l'axe, et P et Q les points d'intersection de la

parabole avec le cercle qui passe par M, N et le sommet de la parabole.

Montrer géométriquement que :

- 1° MP et MQ sont les normales à la parabole en P et Q ;
- 2° La droite de Simson de N , par rapport au cercle MPQ , est l'une des asymptotes de l'hyperbole d'Apollonius de M , par rapport à la parabole et par conséquent :
- 3° La droite de Simson Δ de N , par rapport au cercle MPQ , est perpendiculaire à l'axe de la parabole;



- 4° Le lieu du centre du cercle MPQ est une parabole ayant pour sommet le foyer de la parabole donnée;
- 5° L'enveloppe du cercle MPQ est une cubique circulaire;
- 6° Le lieu du point d'intersection de la tangente en M à la parabole avec la droite de Simson de N est une cubique ⁽¹⁾.

(N. ABRAMESCU.)

SOLUTION

Par M. PARROD.

Rappelons les propriétés suivantes :

Les asymptotes d'une hyperbole équilatère inscrite à un

⁽¹⁾ Énoncé rectifié.

triangle sont deux droites de Simson dont les points sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit.

Le cercle qui passe par les pieds des normales menées d'un point à une parabole passe par le sommet; il rencontre l'axe en un deuxième point dont l'abscisse est celle du point considéré augmentée du paramètre p .

Les hyperboles d'Apollonius d'une parabole ont pour asymptote l'axe de la parabole, l'abscisse de l'autre asymptote est celle du point considéré diminuée du paramètre p .

1°, 2°, 3° Considérons l'hyperbole d'Apollonius, définissant les points P et Q, relative au point M de la parabole, le cercle MPQ passe par le sommet S, il rencontre l'axe en N et d'après ce qui précède MN est la normale en M.

L'axe est la droite de Simson d'un point A, du cercle MPQ, situé sur la tangente au sommet. Cette propriété est bien connue et d'ailleurs c'est une conséquence de la suite.

Abaïssons les perpendiculaires NP', NQ' sur les normales MP, MQ; le quadrilatère MNP'Q' est inscriptible, les angles NMQ', NP'Q', NSQ sont égaux; MP rencontre l'axe en B, les angles BSQ, SBP sont égaux puisque les deux sécantes communes sont également inclinées sur l'axe; en résumé les angles NP'Q', P'NB sont complémentaires, P'Q' est perpendiculaire sur l'axe, donc la droite de Simson du point N est la deuxième asymptote.

Les points A et N sont donc diamétralement opposés dans le cercle MSPQ.

L'angle NSH est alors droit, le point A est sur la tangente au sommet.

L'angle AMN étant droit, le point A est aussi sur la tangente en M à la parabole.

4° Les coordonnées du point M étant (x, y) , celles du centre O du cercle MPQ, c'est-à-dire du milieu de AN, sont $\left(\frac{x+p}{2}, \frac{y}{4}\right)$, et l'équation du lieu du point O est

$$16y^2 = 2p(2x - p),$$

parabole ayant pour sommet le foyer de la parabole donnée.

5° Le cercle MPQ passant par un point fixe S, le point de contact de ce cercle avec son enveloppe est sur la perpendiculaire abaissée de ce point S sur la tangente en O' au lieu de O', c'est-à-dire sur la parabole précédente.

Pour que l'enveloppe fût une strophoïde il faudrait que le point S fût sur la directrice de la parabole lieu de O' , ce qui n'est pas; le lieu est une cubique dont le point S est un point double et dont le sommet est le point d'abscisse p .

6° Les coordonnées du point M étant x_0, y_0 les équations des deux droites sont

$$2px - 2y_0y + y_0^2 = 0, \quad 2px = y_0^2 - 2p^2;$$

d'où

$$p(2x + p)^2 = 2y^2(x + p),$$

cubique ayant pour asymptote $x + p = 0$; cette droite est à la distance $\frac{-p}{2}$ de la directrice.

L'origine nouvelle est un point double.

La courbe est asymptotique à la parabole donnée.

Remarques. — Si d'un point quelconque M on mène les normales MP, MQ, MR à une parabole de sommet S, et si du point M on abaisse les perpendiculaires MH et MK sur l'axe et la tangente au sommet, le cercle PQRS passe par le milieu de SK et rencontre l'axe en un point N tel que $HN = +p$; d'où sa construction.

Le point M étant sur la parabole, la tangente en M rencontre la tangente en S au point A, le cercle PQMS passe par le point A et le pied de la normale MN sur l'axe; le cercle de diamètre AM rencontre l'axe aux points B, C tels que MB et MC sont les normales MP, MQ.

Autres solutions de MM. E.-N. BARISIEN, BOUVAIST, L. KLUG, J. LEMAIRE. Le premier de ces correspondants ajoute la remarque suivante : *La normale en M à la parabole et les droites de Simson du point N se rencontrent au point N' symétrique de N par rapport à M; le lieu de N' est donc une parabole.*

