

F. GOMÈS TEIXEIRA

Sur les développôides de l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13
(1913), p. 111-113

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__111_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'16a]

SUR LES DEVELOPPOÏDES DE L'ELLIPSE;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

Considérons l'ellipse représentée par les équations paramétriques

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

et cherchons l'enveloppe d'une droite D passant par un point variable (x, y) de cette ellipse et faisant un angle constant ω avec la tangente à cette courbe en le point mentionné.

L'équation de la droite D est

$$Y - b \sin t = \frac{b \cot t + am}{bm \cot t - a} (X - a \cos t),$$

où $m = \tan \omega$, ou

$$b(mY - X) \cos t - a(Y + mX) \sin t + \frac{1}{2} c^2 m \sin 2t + ab = 0,$$

en faisant

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

L'enveloppe des positions que cette droite prend, quand le point (x, y) parcourt l'ellipse, est déterminée par cette équation et par celle qu'on obtient en la dérivant par rapport à t , savoir :

$$b(mY - X) \sin t + a(Y + mX) \cos t - c^2 m \cos 2t = 0.$$

Changeons maintenant les axes des coordonnées, en prenant pour nouveaux axes deux droites perpendiculaires l'une à l'autre passant par le centre de l'ellipse

et faisant des angles égaux à ω avec les axes de cette courbe; et pour cela posons

$$X_1 = X \cos \omega - Y \sin \omega, \quad Y_1 = X \sin \omega + Y \cos \omega.$$

Les équations précédentes deviennent

$$b X_1 \cos t + a Y_1 \sin t - \frac{1}{2} c^2 \sin \omega \sin 2t - ab \cos \omega = 0,$$

$$b X_1 \sin t - a Y_1 \cos t + c^2 \sin \omega \cos 2t = 0.$$

L'enveloppe considérée, c'est-à-dire la développée de l'ellipse, peut donc être représentée par les équations paramétriques

$$X_1 = \frac{c^2 \sin \omega}{b} \sin^3 t + a \cos \omega \cos t,$$

$$Y_1 = \frac{c^2 \sin \omega}{a} \cos^3 t + b \cos \omega \sin t.$$

Posons maintenant

$$X_1 = X_2, \quad a Y_1 = b Y_2$$

les équations prennent la forme

$$X_2 = \frac{c^2}{b} \sin \omega \sin^3 t + a \cos \omega \cos t,$$

$$Y_2 = \frac{c^2}{b} \sin \omega \cos^3 t + a \cos \omega \sin t.$$

Or, ces équations représentent (comme on peut le voir, par exemple, dans notre *Traité des courbes spéciales*, t. I, p. 334) une courbe parallèle à l'astroïde définie par les équations

$$X_1 = \frac{c^2}{b} \sin \omega \sin^3 t, \quad Y_1 = \frac{c^2}{b} \sin \omega \cos^3 t.$$

Donc, nous avons le théorème suivant, qui n'a pas encore été peut-être signalé :

Les développées de l'ellipse sont des courbes affines des lignes parallèles à une astroïde.

Il résulte encore de ce qui précède que l'équation cartésienne de la développée de l'ellipse peut être déduite immédiatement de celle des courbes parallèles à l'astroïde (*loc. cit.*, p. 338). On trouve ainsi

$$\begin{aligned} & [3(b^2 X_1^2 + a^2 Y_1^2 - c^4 \sin^2 \omega) - 4a^2 b^2 \cos^2 \omega]^3 \\ & + b^2 [27ac^2 X_1 Y_1 \sin \omega - 9a \cos \omega (b^2 X_1^2 + a^2 Y_1^2) \\ & - 18ac^4 \cos \omega \sin^2 \omega + 8a^3 b^2 \cos^3 \omega]^2 = 0. \end{aligned}$$

Remarquons enfin que, en tenant compte d'un théorème connu (*loc. cit.*, p. 336), on peut encore énoncer le théorème donné ci-dessus de la manière suivante :

Chaque développée de l'ellipse est une courbe affine d'une autre qui enveloppe une droite qui se déplace de manière que le segment compris entre deux autres droites fixes soit constant.

Les équations des droites fixes sont

$$(2abY_1 \cos \omega - c^2 X_1 \sin \omega)^2 = (c^4 \sin^2 \omega - 4a^2 b^2 \cos^2 \omega) X_1^2$$

et ces droites sont donc réelles quand

$$\tan^2 \omega > \frac{4a^2 b^2}{c^4}.$$