

RENÉ GARNIER

Sur l'intégrale $\int \frac{d\theta}{1+e\cos\theta}$

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 502-505

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__502_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[C2e]

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{d\theta}{1 + e \cos \theta}$;

PAR M. RENÉ GARNIER.

Je me propose d'indiquer dans cette Note comment on peut obtenir l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{d\theta}{1 + e \cos \theta} (|e| < 1),$$

à l'aide de considérations géométriques.

1. Supposons, comme il est permis, $e > 0$, et considérons l'ellipse (E) définie en coordonnées polaires par l'équation

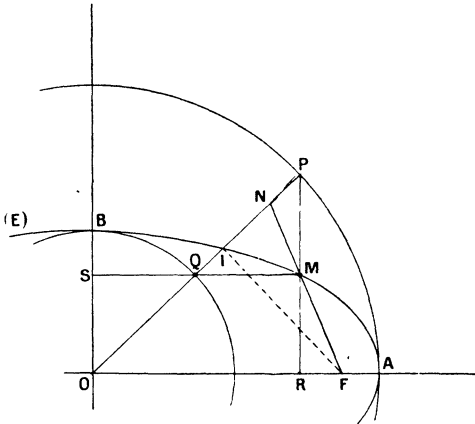
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta};$$

il s'agit d'effectuer la quadrature $\frac{1}{p} \int r d\theta$. Or, soient

(¹) *Gesammelte Abhandlungen* von H. MINKOWSKI, t. II. Voir, par exemple, les pages 215, 257, 278.

F le foyer de (E) situé au pôle des coordonnées, O le centre de (E), M un point de (E), P le point du cercle principal correspondant à M dans la transformation

Fig. 1.



homographique classique, N l'intersection de OP et FM, R et S les projections de M sur le grand axe OA et le petit axe OB, Q l'intersection de OP avec MS et I la projection de F sur OP. J'établirai d'abord la relation

$$ON + FN = OA + OB.$$

On a évidemment

$$ON = OF \frac{OQ}{FR + QS} \quad \text{et} \quad FN = OF \frac{FM}{FR + QS};$$

or

$$\begin{aligned} \text{FR} + \text{QS} &= \text{OF} - \text{OR} + \text{OR} \frac{\text{OB}}{\text{OA}} = \text{OF} - \text{OR} \frac{\text{OA} - \text{OB}}{\text{OA}} \\ &= \text{OF} - \text{OR} \frac{\overline{\text{OF}}^2}{(\text{OA} + \text{OB}) \text{OA}} = \text{OF} - \text{OF} \frac{\text{OI}}{\text{OA} + \text{OB}}. \end{aligned}$$

Mais, d'après la démonstration classique de Courcelles, on a

$$\mathbf{FM} = \mathbf{PI},$$

d'où

$$OQ + FM = OA + OB - OI.$$

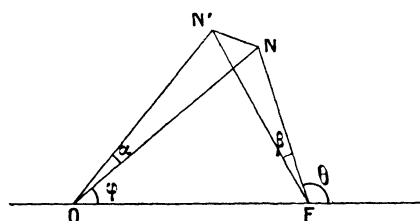
Il en résulte immédiatement

$$ON + FN = OF \frac{OA + OB - OI}{OF - \frac{OF \cdot OI}{OA + OB}} = OA + OB.$$

C. Q. F. D.

2. Quand M décrit (E), le lieu du point N est donc une ellipse (e) de foyers O et F (1). Soit alors N' un

Fig. 2.



point infiniment voisin de N sur (e) ; on a, à des infiniment petits d'ordre supérieur près :

$$\frac{\alpha \cdot ON}{\sin \widehat{ON'N}} = NN' = \frac{\beta \cdot FN}{\sin \widehat{FN'N}},$$

mais les angles $\widehat{ON'N}$ et $\widehat{FN'N}$ sont supplémentaires (à un infiniment petit près) en vertu de la propriété classique de la tangente à l'ellipse ; il vient donc :

$$\alpha \cdot ON = \beta \cdot FN,$$

(1) On démontrerait de même que le lieu de l'intersection de FM avec la symétrique de OP par rapport à OA est une hyperbole homofocale à (e).

multipliant par $\frac{OQ}{ON}$ et employant les notations habituelles, on obtient la relation

$$(1) \quad b \, d\varphi = r \, d\theta.$$

La valeur de l'intégrale indéfinie cherchée est donc $\frac{b\varphi}{p}$ et la formule classique

$$(2) \quad \tan \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2}$$

l'exprime immédiatement en fonction de θ , si l'on préfère (1).

3. La Géométrie permet encore d'établir autrement la relation (1). Soient M' un point de (E) infiniment voisin de M et P' le point correspondant du cercle principal. On a :

$$r \, d\theta = 2 \text{ aire } \frac{FMM'}{FM} = 2 \frac{OB}{OA} \frac{\text{aire } FPP'}{FM} = \frac{OB}{OA} \frac{PP' \times PI}{FM}.$$

Mais on a

$$PI = FM,$$

d'où

$$r \, d\theta = \frac{OB}{OA} PP' = b \, d\varphi.$$

La première méthode, quoique plus longue, a sur la seconde l'avantage d'être indépendante de l'expression de l'aire d'un secteur infiniment petit et de sa projection sur un plan ; elle fait connaître, en outre, une propriété remarquable du point N.

(1) Rappelons qu'analytiquement la relation (1) résulte du rapprochement des équations $b \sin \varphi = r \sin \theta$ et $\frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \frac{d\theta}{\sin \theta}$, dont la seconde provient de (2) par différentiation logarithmique.