

ÉLIE PARROD

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 37-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__37_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[N° 16a]

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ÉLIE PARROD.

Dans cette Note, j'ai pour but d'établir le théorème suivant et d'en déduire quelques conséquences :

THÉORÈME. — *Si deux quadrilatères $ABCD$, $A'B'C'D'$, inscrits dans une même conique sont homologues, les six points $(AB, C'D')$, $(AC, D'B')$, $(AD, B'C')$, $(A'B', CD)$, $(A'C', DB)$, $(A'D', BC)$ sont sur une droite Δ , passant par le centre d'homologie P et tangente en ce point P aux deux coniques $ABCDP$, $A'B'C'D'P$.*

Ce théorème peut être considéré comme une généralisation du théorème d'Aubert. Il se déduit facilement du théorème bien connu suivant :

THÉORÈME. — *Considérons une conique variable passant par quatre points fixes A, B, C, D et rencontrant en M, N , deux droites fixes AP, BP issues de A et B ; la droite MN passe par le point d'intersection de la droite CD et de la tangente en P à la conique $ABCDP$.*

En effet, les points M, N décrivent sur AP et BP deux

divisions homographiques qui ont le point P commun ; la droite MN passe par un point fixe O situé sur la tangente en P à la conique du faisceau qui passe par P ; une conique particulière se compose des deux droites AB, CD , donc ce point fixe O est sur la droite CD .

Ceci étant : dans le théorème précédent, la conique considérée passe par les quatre points A, B, C, D , et les deux droites CP, DP rencontrent la conique en C', D' ; la tangente en P à la conique $ABCDP$ passe par l'intersection O des droites $AB, C'D'$; la conique $A'B'C'D'P$ montre que le point O est sur la tangente en P . Donc ces deux coniques sont tangentes en P et la tangente en P est PO .

Les autres combinaisons montrent que les cinq autres points sont sur cette droite Δ .

APPLICATIONS.

I. Soient Γ, Γ' deux coniques se coupant en quatre points A, B, C, D . Prenons le centre d'homologie P sur la conique Γ , on obtient le quadrilatère homologique $A'B'C'D'$ inscrit dans la conique Γ' ; à cette figure, il correspond une droite Δ tangente en P à Γ .

Exemple. — Les normales PA, PB, PC, PD menées d'un point P à une conique la rencontrent en A', B', C', D' , la droite Δ correspondante est tangente en P à l'hyperbole d'Apollonius.

Avec les symétriques des points A, B, C, D par rapport au centre O' on aurait une droite Δ tangente en ce point à cette hyperbole ; la conique $A'B'C'D'O'$ est tangente en O' à l'hyperbole d'Apollonius.

II. Le point P peut être supposé à l'infini.

Exemple. — Si dans un cercle on mène quatre

cordes parallèles AA' , BB' , CC' , DD' , on obtiendra une droite Δ parallèle aux cordes, qui sera une asymptote de deux hyperboles, l'une passant par A, B, C, D et l'autre par A', B', C', D' .

III. La conique peut être remplacée par un système de deux droites.

Exemple. — Un cercle est rencontré par deux sécantes en A, B, C, D ; prenons, sur le cercle, le centre d'homologie P ; il correspond quatre points A', B', C', D' sur les deux sécantes, ce qui donne quatre points situés sur la tangente en P au cercle.

IV. Le quadrilatère $ABCD$ peut être remplacé par un triangle et une tangente en un sommet ou par une corde et les tangentes aux extrémités.

Exemple. — Soient une conique, un axe AB , le cercle ayant pour diamètre cet axe et les tangentes aux sommets correspondants A, B . Prenons le point P sur la conique, les droites PA, PB rencontrent le cercle en A', B' ; la tangente en A' au cercle rencontre la tangente en B au point B_1 et la tangente en B' au cercle rencontre la tangente en A au point A_1 ; la droite A_1B_1 est tangente en P à la conique.

V. Supposons, pour terminer, que trois points A, B, C soient confondus et considérons la conique osculatrice en ce point; elle rencontre la conique donnée en D et passe par un point P situé sur la tangente en D à cette conique donnée qui est rencontrée en A' par PA .

DA' rencontre la tangente en A au point E , la tangente en A' rencontre AD en F ; la droite EF est tangente en P .

(40)

Je me bornerai à ces quelques applications et je laisserai au lecteur le soin de transformer la propriété par polaires réciproques.