

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 332-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__332_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2162.

(1910, p. 432)

Soient ABCD un tétraèdre régulier, E le milieu de BC, F le milieu de DA ; on mène dans le plan EDA deux droites EH et EK, faisant avec EF des angles de 30° .

Si l'on projette en P, Q, R, S, un point M de l'une de ces droites sur les plans des faces du tétraèdre, la sphère PQRS est tangente à la sphère inscrite.

Si M est sur EH, le point inverse M' (qui a même sphère pédale) est sur EK. L'enveloppe de la droite MM' est une ellipse tangente aux droites EH et EK aux points H et K et dont le cercle principal est tangent aux droites ED et EA en D et A, le point F est foyer.

Le lieu du centre de la sphère pédale est une hyperbole ayant même axe focal que l'ellipse précédente et dont les asymptotes sont parallèles aux droites EH et EK ; le milieu O de EF est un foyer.

SONDAT.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit a la longueur de l'arête du tétraèdre donné, nous avons

$$EA = ED = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad DA = a;$$

si l'on pose

$$\widehat{FEA} = \theta,$$

on a

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

posons

$$EM = l, \quad EM' = l',$$

les deux droites EM , EM' devant être évidemment deux droites inverses du triangle DEA . On a

$$PM = l \sin(\theta - 30^\circ) = \frac{l}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$

$$MQ = l \sin(\theta + 30^\circ) = \frac{l}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} + \sqrt{2});$$

de même

$$P'M' = \frac{l'}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} + \sqrt{2}),$$

$$Q'M' = \frac{l'}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} - \sqrt{2});$$

d'où

$$PM + QM = l, \quad P'M' + Q'M' = l';$$

or

$$PM + QM + RM + SM = P'M' + Q'M' + R'M' + S'M' = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

comme

$$RM = SM, \quad R'M' = S'M',$$

$$RM = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - l \right), \quad R'M' = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - l' \right),$$

on a aussi

$$RM \cdot R'M' = PM \cdot P'M';$$

d'où :

$$(1) \quad 2ll' - (l + l')a\sqrt{6} + 2a^2 = 0.$$

On a, d'autre part, en désignant par I le centre de la sphère inscrite au tétraèdre, $EI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ et

$$\overline{IM}^2 = l^2 + \frac{a^2}{8} - \frac{al\sqrt{6}}{4}, \quad \overline{IM'}^2 = l'^2 + \frac{a^2}{8} - \frac{al'\sqrt{6}}{4},$$

le centre ω de la sphère pédale est le milieu de MM' et

$$\overline{MM'}^2 = l^2 + l'^2 - ll',$$

comme

$$\begin{aligned} 2I\omega^2 + \frac{\overline{MM'}^2}{2} &= \overline{IM}^2 + \overline{IM'}^2, \\ I\omega^2 &= \frac{2(l^2 + l'^2) - a^2}{8}, \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de la relation (1),

$$I\omega^2 = \frac{a^2 - 2ll'}{2a\sqrt{6}},$$

soit ρ le rayon de la sphère pédale

$$\rho^2 = \frac{\overline{MM'}^2}{4} + PM.P'M' = \frac{3(l^2 + l'^2) - 2ll'}{12}$$

ou

$$\rho = \frac{a^2 - ll'}{a\sqrt{6}},$$

comme le rayon r de la sphère inscrite est égal à $\frac{a}{2\sqrt{6}}$, on voit que

$$I\omega = \rho - r,$$

la sphère pédale est donc tangente à la sphère inscrite.

La relation (1) montre que les points M et M' se correspondent nomographiquement sur EH et EK et que lorsque M vient en E,

$$l = 0, \quad l' = \frac{2a}{\sqrt{6}} = EK,$$

MM' enveloppe donc une conique tangente à EH et EK en H et K, son centre sera le point O_1 tel que

$$EO_1 = \frac{l_1 + l_2}{2} \cos 30^\circ,$$

l_1 et l_2 étant racines de l'équation

$$l^2 - al\sqrt{6} + a^2 = 0, \quad EO_1 = \frac{3a\sqrt{2}}{4},$$

la longueur de l'axe situé sur EF sera

$$(l_1 - l_2) \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

La perpendiculaire en D à DE passe par O, et l'on a

$$DO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

ce qui montre que les droites DE, AE sont tangentes au cercle principal de la conique considérée en D et A. La perpendiculaire en H à EH coupe EF en H' et l'on a

$$EH' = \frac{2a\sqrt{2}}{3};$$

d'où

$$O_1H' \cdot O_1E = \frac{a^2}{8} = \overline{O_1F}^2,$$

le point F est un foyer de la conique.

Le centre de la sphère pédale est le milieu de MM', il est à l'intersection des parallèles à EH et EK menées par les milieux μ et μ' de EM et EM', ces droites se correspondent homographiquement et le centre de la sphère pédale décrit une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles à EH et EK et ayant visiblement mêmes sommets situés sur EF que l'ellipse enveloppe de MM'.

Les foyers F_1 et F_2 seront tels que

$$O_1F_1 = O_1F_2 = DO_1 \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

d'où

$$EF_1 = EO_1 - O_1F_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4};$$

F_1 est donc le milieu de EF .

Remarque. — Une étude plus complète de la question montre que les cercles sections de la sphère pédale par le plan EDA sont orthogonaux à un cercle fixe bitangent à l'hyperbole, lieu du centre de la sphère pédale, ils enveloppent par conséquent deux cercles dont l'un est la section par le plan EDA de la sphère inscrite.

Autre solution par M. KLUG.