

C. SERVAIS

Extension des théorèmes de Frégier aux courbes et aux surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12 (1912), p. 145-156

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__145_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M'3e, M'2c]

**EXTENSION DES THÉORÈMES DE FRÉGIER
AUX COURBES ET AUX SURFACES ALGÈBRIQUES;**

PAR M. C. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

1. On joint le sommet M d'un triangle MAB à un point S du côté AB; les droites menées par les sommets A et B, parallèles respectivement aux côtés opposés, rencontrent MS aux points A₁, B₁. On a

$$(\alpha) \quad \frac{1}{MS} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1}.$$

Soient X le point (AA₁, BB₁), O le milieu de AB, S' le point d'intersection de MS avec la parallèle menée par X au côté AB. On a

$$(A_1 B_1 MS') = (ABO \infty) = -1$$

ou

$$\frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} = \frac{2}{MS'} = \frac{1}{MS}.$$

Soient A₂ le point d'intersection de MS avec la perpendiculaire élevée au point A sur MA; α , b , n les semi-droites MA, MB, MS; on a

$$MA = MA_2 \cos(n\alpha), \quad MA : \sin(bn) = MA_1 : \sin(ba),$$

donc

$$(b) \quad MA_1 = MA_2 \frac{\cos(n\alpha) \sin(ab)}{\sin(nb)}.$$

(¹) FRÉGIER, *Annales de Mathématiques de Gergonne*, t. VI, p. 229 et 231; t. VII, p. 91.

2. On joint le sommet M d'un tétraèdre $MABC$ à un point S de la face ABC ; les plans α, β, γ menés par les sommets A, B, C respectivement parallèles aux faces opposées rencontrent MS aux points A_1, B_1, C_1 ; on a

$$(c) \quad \frac{1}{MS} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}.$$

Soient S', B', C' respectivement les points (BC, AS) , (β, MS') , (γ, MS') ; S'' le point d'intersection de MS avec la parallèle menée par S' à MA ; les droites $B'B_1, C'C_1$ sont aussi parallèles à MA . On a, d'après l'égalité (a) ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{MS'} &= \frac{1}{MB'} + \frac{1}{MC'} & \text{ou} & \quad \frac{1}{MS''} = \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}, \\ \frac{1}{MS} &= \frac{1}{MS''} + \frac{1}{MA_1} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}. \end{aligned}$$

On désigne par x, y, z deux semi-droites faisant avec la semi-droite $x \equiv MS$ un trièdre trirectangle; par α, b, c les semi-droites MA, MB, MC ; par $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1, \alpha_2 \beta_2 \gamma_2, \alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ les cosinus directeurs de a, b, c relativement au trièdre xyx . Le plan α a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - MA.\alpha_1 & y - MA.\beta_1 & z - MA.\gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0;$$

par suite,

$$MA_1 = MA \frac{\sin(abc)}{\sin(xbc)}.$$

Le plan mené par A perpendiculairement à MA coupe MS en A_2 ; on a

$$MA = MA_2 . \alpha_1,$$

donc

$$(d) \quad \frac{1}{MA_1} = \frac{1}{MA_2} \frac{\sin(abc)}{\alpha_1} \frac{1}{\sin(abc)}.$$

Un cône du second ordre ayant pour trièdre principal xyz a pour équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Le trièdre abc est conjugué à ce cône si l'on a

$$A\alpha_1\alpha_2 + B\beta_1\beta_2 + C\gamma_1\gamma_2 = 0,$$

$$A\alpha_1\alpha_3 + B\beta_1\beta_3 + C\gamma_1\gamma_3 = 0,$$

$$A\alpha_2\alpha_3 + B\beta_2\beta_3 + C\gamma_2\gamma_3 = 0.$$

De ces égalités on déduit

$$A\alpha_2(\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1) = B\beta_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3),$$

$$A\alpha_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = C\gamma_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1),$$

ou

$$(e) \quad \frac{\sin(xca)}{\alpha_2} = \frac{A}{B} \frac{\sin(\gamma ca)}{\beta_2}, \quad \frac{\sin(xab)}{\alpha_3} = \frac{A}{C} \frac{\sin(zab)}{\gamma_3}.$$

Les égalités (e) et leurs analogues donnent

$$(f) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin(xbc)}{\sin(\gamma bc)} \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\sin(xca)}{\sin(\gamma ca)} \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\sin(xab)}{\sin(\gamma ab)} \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \frac{A}{B}, \\ \frac{\sin(xbc)}{\sin(z bc)} \frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\sin(xca)}{\sin(z ca)} \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \frac{\sin(xab)}{\sin(z ab)} \frac{\gamma_3}{\alpha_3} = \frac{A}{C}. \end{array} \right.$$

Ces relations constituent pour le trièdre principal du cône la propriété analogue à celle exprimée par la relation

$$\tan(ax)\tan(a'x) = \text{const.}$$

pour le couple rectangulaire xy d'une involution de rayons. On peut écrire ces relations sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\sin(xbc)}{\sin(\gamma bc)} \frac{\sin(axz)}{\sin(ayz)} &= \frac{\sin(xca)}{\sin(\gamma ca)} \frac{\sin(bxz)}{\sin(byz)} = \frac{\sin(xab)}{\sin(\gamma ab)} \frac{\sin(cxz)}{\sin(cyz)}, \\ \frac{\sin(xbc)}{\sin(z bc)} \frac{\sin(axy)}{\sin(azy)} &= \frac{\sin(xca)}{\sin(z ca)} \frac{\sin(bxy)}{\sin(bzy)} = \frac{\sin(xab)}{\sin(z ab)} \frac{\sin(cxy)}{\sin(czy)}. \end{aligned}$$

Elle sont alors applicables à deux trièdres conjugués quelconques.

3. Deux cordes p, q issues d'un point M d'une courbe algébrique d'ordre n et conjuguées dans une involution rencontrent la courbe aux points $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}; Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$. Les droites $P_1Q_1, P_2Q_2, \dots, P_{n-1}Q_{n-1}$ déterminent sur la conjuguée n de la tangente en M , dans l'involution considérée, les points $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$. Le conjugué harmonique de M relativement au système de points X est un point S indépendant du couple pq choisi dans l'involution.

Soient A, B les conjugués harmoniques de M relativement aux systèmes de points P, Q . La droite AB est la droite polaire du point M par rapport au système de droites $P_1Q_1, P_2Q_2, \dots, P_{n-1}Q_{n-1}$, et le point $S \equiv (n, AB)$ est le conjugué harmonique de M relativement au système de points $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$. Les points A, B appartiennent à la conique polaire du point M relativement à la courbe algébrique considérée et le point S est le pôle de l'involution déterminée sur cette conique par les couples pq . Le point S est donc indépendant du couple choisi pq .

4. Les parallèles menées par les points $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ respectivement aux droites q et p déterminent sur la droite n les points $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_{n-1}$; on a

$$(1) \quad \frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1},$$

car si les parallèles menées par les points A, B respec-

tivement à q et p coupent la droite n en A' et B' , on a

$$\frac{n-1}{MA'} = \sum \frac{1}{MP'_1}, \quad \frac{n-1}{MB'} = \sum \frac{1}{MQ'_1}.$$

Mais, d'après l'égalité (a), on a

$$\frac{1}{MS} = \frac{1}{MA'} + \frac{1}{MB'},$$

donc

$$\frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1}.$$

Ainsi symétrique de M par rapport au point S est le conjugué harmonique de M relativement au système de points $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}; Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_{n-1}$.

5. *Au point M d'une courbe algébrique on mène deux cordes p, q conjuguées dans une involution dont le couple rectangulaire est formé par la tangente et la normale n au point M . Si R est le rayon de courbure de la courbe au point M ; $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$, les segments comptés à partir de M et déterminés sur la normale n par la courbe considérée; S la conjuguée harmonique de M par rapport aux points $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ (3); on a*

$$(2) \quad \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}} - \frac{n-1}{MS} = \frac{\tan(np) \tan(nq)}{2R}$$

On désigne par P''_1 le point de rencontre de la normale n avec la perpendiculaire élevée au point P_1 sur p . L'égalité (b) permet de remplacer la relation (1) par la suivante :

$$\sin(pq) \frac{n-1}{MS} = \tan(np) \tan(nq) \frac{\cos(nq)}{\sin(np)} \sum \frac{1}{MP''_1} - \frac{\sin(np)}{\cos(nq)} \sum \frac{1}{MQ''_1}.$$

Dans l'involution considérée au point M le produit $\text{tang}(np) \cdot \text{tang}(nq)$ est constant, et si dans la précédente égalité on substitue au couple pq la tangente et la normale au point M , l'un des points $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}$ est l'extrémité du diamètre du cercle osculateur en M et les autres sont à l'infini. Quant aux points $Q''_1, Q''_2, \dots, Q''_{n-1}$, ce sont les points de rencontre de la normale avec la courbe. On a d'ailleurs dans cette hypothèse

$$\cos(nq) = 1, \quad \sin(pq) = -\sin(np) = 1,$$

donc

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}} - \frac{n-1}{MS} = \frac{\text{tang}(np) \text{tang}(nq)}{2R}.$$

6. Si N' est le segment déterminé par la conique polaire du point M sur la normale n , R' le rayon de courbure de cette conique en M , on a, d'après la formule (2),

$$\frac{1}{N'} - \frac{1}{MS} = \frac{\text{tang}(np) \text{tang}(nq)}{2R'}.$$

Mais

$$\frac{n-1}{N'} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}},$$

donc

$$R' = (n-1)R.$$

Si R_h représente le rayon de courbure au point M d'une courbe polaire d'ordre $n-h$ de ce point, on a de même

$$R' = (n-h-1)R_h;$$

par suite,

$$\frac{1}{R_h} = \frac{n-h-1}{n-1} \frac{1}{R}.$$

Ainsi : *En un point d'une courbe algébrique, les*

courbures des polaires successives de ce point forment une progression arithmétique ⁽¹⁾.

7. Si l'involution considérée (pq) est orthogonale on a

$$\frac{n-1}{MS} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}} \quad (2).$$

On conclut de là : *Si la conique polaire de M est une hyperbole équilatère, on a*

$$\frac{1}{2R} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}} = 0,$$

car le point S est alors à l'infini. Dans cette hypothèse on a aussi

$$\sum \frac{1}{MP'_1} - \sum \frac{1}{MQ'_1} = 0.$$

8. *Les arêtes a, b, c d'un trièdre ayant son sommet en un point M d'une surface algébrique d'ordre n, et conjugué à un cône donné, rencontrent cette surface aux points P₁, P₂, ..., P_{n-1}; Q₁, Q₂, ..., Q_{n-1}; R₁, R₂, ..., R_{n-1}. Les plans P₁ Q₁ R₁, P₂ Q₂ R₂, ..., P_{n-1} Q_{n-1} R_{n-1} déterminent sur le rayon polaire x du plan tangent en M, relativement au cône considéré, les points X₁, X₂, ..., X_{n-1}. Le conjugué harmonique de M relativement au système de points X est un point S indépendant du trièdre conjugué choisi.*

⁽¹⁾ MOUTARD, *Nouv. Ann. de Math.*, 1860, p. 195. — C. SERVAIS, *Bull. Acad. Belgique*, 1891, p. 364.

⁽²⁾ PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*, t. II, 1886, n° 362. Cette formule, établie par Poncelet à l'aide d'autres considérations, met en évidence la propriété (3) pour une involution orthogonale et par projection pour une involution quelconque.

Soient A, B, C les conjugués harmoniques de M relativement aux systèmes de points P, Q, R. Le plan ABC est le plan polaire de M par rapport au système de plans $P_1 Q_1 R_1, P_2 Q_2 R_2, \dots, P_{n-1} Q_{n-1} R_{n-1}$ et le point $S \equiv (x, ABC)$ est le conjugué harmonique de M relativement au système de points $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$. Les points A, B, C appartiennent à la quadrique polaire du point M relativement à la surface algébrique considérée; donc, d'après le théorème de Frégier, le point S est indépendant du trièdre conjugué pqr choisi.

9. *Les plans menés par les points $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$, parallèles respectivement aux plans bc, ca, ab déterminent sur la droite x les systèmes de points $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_{n-1}, R'_1, R'_2, \dots, R'_{n-1}$; on a*

$$(3) \quad \frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1} + \sum \frac{1}{MR'_1}.$$

Car si les plans menés par A, B, C parallèles respectivement à bc, ca, ab déterminent sur la droite x les points A', B', C', on a

$$\frac{n-1}{MA'} = \sum \frac{1}{MP'_1}, \quad \frac{n-1}{MB'} = \sum \frac{1}{MQ'_1}, \quad \frac{n-1}{MC'} = \sum \frac{1}{MR'_1}.$$

Mais d'après l'égalité (c),

$$\frac{1}{MS} = \frac{1}{MA'} + \frac{1}{MB'} + \frac{1}{MC'},$$

donc

$$\frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1} + \sum \frac{1}{MR'_1}.$$

Ainsi : Si $MM' = 3 MS$, le point M' est le conjugué harmonique de M relativement au système de

points $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_{n-1}, R'_1, R'_2, \dots, R'_n$.

10. Si a, b, c est un trièdre conjugué à un cône dont le trièdre principal est formé par la normale x et deux tangentes rectangulaires y et z au point M de la surface; R, R' les rayons de courbure des sections normales xy, xz au point M ; $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$ les segments comptés à partir de M et déterminés sur la normale x par la surface; S le conjugué harmonique de M par rapport aux points $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ (8), on a

$$\frac{\cos(xa)}{\sin(xbc)} \frac{n-1}{MS} = \frac{\cos(xa)}{\sin(xbc)} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}} \right) + \frac{\cos(\gamma a)}{\sin(\gamma bc)} \frac{1}{2R} + \frac{\cos(z a)}{\sin(z bc)} \frac{1}{2R'}.$$

On désigne par P''_1 le point de rencontre de la normale x avec le plan mené par P_1 normalement à la droite a . L'égalité (d) permet de remplacer la relation (3) par la suivante :

$$(n-1) \frac{\sin(abc)}{MS} = \frac{\sin(xbc)}{a_1} \sum \frac{1}{MP''_1} + \frac{\sin(xca)}{a_2} \sum \frac{1}{MQ''_1} + \frac{\sin(xab)}{a_3} \sum \frac{1}{MR''_1}.$$

D'après les égalités (e) cette relation peut s'écrire

$$(n-1) \frac{\sin(abc)}{MS} = \frac{\sin(xbc)}{a_1} \sum \frac{1}{MP''_1} + \frac{A}{B} \frac{\sin(\gamma ca)}{\beta_2} \sum \frac{1}{MQ''_1} + \frac{A}{C} \frac{\sin(z ab)}{\gamma_3} \sum \frac{1}{MR''_1}.$$

Si dans cette égalité on substitue au trièdre abc le trièdre xyz , l'un des points Q''_1 et l'un des points R''_1 sont les extrémités des diamètres des cercles de cour-

bure des sections xy , xz et les autres points Q'' , R'' sont à l'infini. Quant aux points P_1'' , P_2'' , ..., ce sont les points de rencontre de la normale avec la surface. On a d'ailleurs, dans cette hypothèse,

$$\sin(abc) = \sin(xbc) = \sin(yca) = \sin(zab),$$

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1;$$

par suite,

$$\frac{n-1}{MS} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}} + \frac{A}{B} \frac{1}{2R} + \frac{A}{C} \frac{1}{2R'}.$$

En remplaçant $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{C}$ par leurs valeurs (égalités f), on a

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\sin(xbc)} \frac{n-1}{MS} &= \frac{\alpha_1}{\sin(xbc)} \sum \frac{1}{N_1} \\ &+ \frac{\beta_1}{\sin(ybc)} \frac{1}{2R} + \frac{\gamma_1}{\sin(zbc)} \frac{1}{2R'}. \end{aligned}$$

11. Si le trièdre a , b , c est trirectangle on a

$$A = B = C,$$

et l'on a

$$\frac{n-1}{MS} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R'},$$

égalité qu'on peut déduire immédiatement de

$$\frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1} + \sum \frac{1}{MR'_1}.$$

Le cône de sommet M étant isotrope, deux tangentes rectangulaires quelconques et la normale en M à la surface algébrique forment un trièdre conjugué à ce cône. De là l'égalité connue

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.}$$

En particulier, si R_1 , R_2 sont les rayons de courbure

principaux, on a

$$\frac{n-1}{MS} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}} + \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}.$$

COROLLAIRES. — *Si au point M la courbure moyenne est nulle, on a*

$$\frac{n-1}{MS} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}}.$$

Si la quadrique polaire de M est un hyperboloïde équilatère, on a

$$\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}} = 0.$$

12. *Si les points S_1, S_2 sont les points S (3) relatifs au point M pour deux sections normales de la surface en M et perpendiculaires entre elles, on a*

$$\frac{1}{MS_1} + \frac{1}{MS_2} = \text{const.}$$

Car, soient R et R' les rayons de courbure au point M de ces sections, on a (7, 11)

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{MS_1} &= \frac{1}{2R} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}}, \\ \frac{n-1}{MS_2} &= \frac{1}{2R'} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}}, \\ \frac{n-1}{MS} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R'} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}}; \end{aligned}$$

donc

$$\frac{n-1}{MS_1} + \frac{n-1}{MS_2} = \frac{n-1}{MS} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}} = \text{const.}$$

COROLLAIRES. — *Le point S relatif au point M pour la section normale à une tangente inflexion-*

nelle de la surface en M est identique au point S relatif au point M pour la surface.

Car si $R' = \infty$, on a

$$\frac{n-1}{MS_2} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_{n-1}},$$

et, par suite,

$$MS_1 = MS.$$

Si la courbure moyenne est nulle au point M, on a

$$\frac{1}{MS_1} + \frac{1}{MS_2} = \frac{2}{MS}.$$