

LÉON AUTONNE

Sur une propriété des matrices linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 118-127

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__118_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B1a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES MATRICES LINÉAIRES;

PAR M. LÉON AUTONNE.

Prenons deux matrices linéaires n -aires u et v , dont une au moins, par exemple u , est invertible, $|u| \neq 0$.
Nommons $\theta = uv$, $\eta = vu$, les deux matrices-produits.

On a

$$u^{-1}\theta u = u^{-1}uvu = \eta;$$

les deux matrices θ et η sont semblables.

Le raisonnement tombe lorsque ni u ni v n'est inversible; la proposition ne subsiste pas non plus, ainsi qu'on le reconnaît sur un exemple simple,

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\theta = u, \quad \eta = 0.$$

On peut donc se poser le problème suivant : *Quelles sont les conditions J, nécessaires et suffisantes pour que les deux matrices-produits θ et η soient semblables ?*

Le présent travail contient la solution du problème.

On reconnaît d'abord que les deux matrices n -aires θ et η ont même polynôme caractéristique ($E = n$ -aire unité),

$$|\rho E - \theta| = |\rho E - \eta| = \rho^n \varphi(\rho),$$

où $\varphi(\rho)$ est un polynôme de degré h , avec $\varphi(0) \neq 0$.

La réponse à la question est fournie par la proposition ci-dessous.

THÉORÈME. — *Les conditions J sont les suivantes : θ^s et η^s ont même rang, pour $s = 1, 2, \dots, \varpi$, ϖ étant un entier positif qui ne dépasse pas $n - h$.*

1° On conservera la terminologie et les notations employées dans mes précédentes recherches sur les matrices linéaires ⁽¹⁾.

(1) I. Sur les formes mixtes (Annales de l'Université de Lyon, 1905). — II. Sur les coordonnées pluckériennes de droite dans

Avant d'entamer la démonstration du théorème, il convient de rappeler ou d'établir quelques théories préliminaires.

2° Soient $a = (a_{\alpha\beta})$, $b = (b_{\alpha\beta})$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$) deux matrices n -aires. Formons dans la matrice-produit ab , la somme des éléments principaux, c'est-à-dire situés sur la diagonale principale; cette somme est

$$\sum_{\alpha} (ab)_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} b_{\beta\alpha}$$

et ne change pas quand on permute α et β , c'est-à-dire a et b . Cette somme est donc la même pour les deux matrices-produits ab et ba .

3° Rangeons dans un ordre déterminé les

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

combinaisons de n indices pris m à m , et numérotons ces combinaisons au moyen d'un indice l variant de 1 à $\binom{n}{m}$. Associons dans la matrice n -aire a les lignes d'indices $k_1, k_2, \dots, k_m$ et les colonnes d'indices $j_1, j_2, \dots, j_m$ pour former un mineur de degré m

$$A_{ll'} = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{vmatrix}.$$

l'espace à $n-1$ dimensions (*Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, 11^e cahier). — III. *Sur les matrices linéaires échangeables à une matrice donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, 14^e cahier). — IV. *Sur les matrices linéaires non inversibles* (*Annales de l'Université de Lyon*, 1909). On renverra à la présente liste par des notations comme (*Index*, II) par exemple.

On aura la matrice

$$\binom{n}{m} - \text{aire} (A_{ll'}) \left[l', l = 1, 2, \dots, \binom{n}{m} \right]$$

que j'ai nommée $\Delta_m a$ (*Index*, II, Chap. VII). On a dans ce travail établi la propriété $\Delta_m ab = \Delta_m a \cdot \Delta_m b$.

4° Formons le polynome caractéristique $|\rho E - a|$ de la matrice a , où E est la n -aire unité. Ce polynome est

$$F(\rho) = \sum_{i=0}^{i=n} \rho^{n-i} (-1)^i Q_i,$$

d'après des théories connues; le coefficient Q_i est la somme des éléments principaux dans la matrice $\binom{n}{i} - \text{aire} \Delta_i a$ (3°).

Au lieu de a prenons le produit ab , Q_i est la somme des éléments principaux dans la matrice $\Delta_i ab = \Delta_i a \cdot \Delta_i b$, c'est-à-dire (2°) dans la matrice $\Delta_i b \cdot \Delta_i a = \Delta_i ba$. Donc les deux matrices-produits ab et ba ont même polynome caractéristique.

5° Décomposons le polynome caractéristique de la n -aire a en ses successifs (*Elementarteiler*)

$$|\rho E - a| = \Pi(\rho - l)^\lambda, \quad n = \Sigma \lambda.$$

Nommons Λ la matrice λ -aire

$$\Lambda = \begin{vmatrix} l & & & & \\ 1 & l & & & \\ 0 & 1 & l & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & l \end{vmatrix},$$

qui admet le successif unique $(\rho - l)^\lambda$. Λ sera (*Index*, IV; *Préliminaires*, Chap. I) une composante de a . Soient $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ les composantes rangées dans

un ordre quelconque ; la n -aire

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \Lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

sera semblable à a et sera la *forme typique de a* . On aura, pour une n -aire invertible convenable R , $\mathfrak{A} = R^{-1} a R$ et a sera *mise sous forme typique*.

La forme typique ne dépend que des successifs, qui la définissent sans ambiguïté, à l'ordre des composantes près, lequel est facultatif.

6° Supposons que la n -aire a ait une puissance nulle et que p soit l'exposant minimum tel que $a^p = 0$. Les successifs de a seront des puissances de ρ . On aura (*Index*, III, 21°)

$$\begin{array}{lcl} g & = g_0 \text{ fois le successif } \rho^{p_0} & \\ g_1 & \text{»} & \rho^{p_1} \\ \dots\dots\dots & & \\ g_i & \text{»} & \rho^{p_i} \\ \dots\dots\dots & & \\ g_k & \text{»} & \rho^{p_k} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} p > p_1 > \dots p_i > \dots > p_k, \\ p_0 = p, \\ i=k \\ n = \sum_{i=0} p_i g_i; \end{array} \right.$$

$$\gamma_i = g + g_1 + \dots + g_i$$

a possède γ_k successifs. Combien en possédera a^s ?

On fera usage du théorème de Bromwich (*Index*, IV; première Partie, Chap. II). Divisons p_i par s ; nommons q_i le quotient et $t_i < s$ le reste. Le successif ρ^{p_i} de a sera remplacé dans a^s par s successifs, savoir : les $s - t_i$ successifs ρ^{q_i} et les t_i successifs ρ^{q_i+1} . Si $s > p_i$, on posera $q_i = 0$, $t_i = p_i$; a^s aura p_i successifs linéaires.

7° Nommons P_i le système des g_i successifs ρ^{p_i} et l_s le nombre des successifs de a^s . En vertu de ce qui précède, P_i fournit à l_s le contingent sg_i sans que ce

contingent puisse dépasser $p_i g_i$. l_s s'obtient sans peine par un schéma très simple.

8° Traçons (le lecteur est prié de faire la figure) dans un plan p parallèles horizontales équidistantes $(1), (2), \dots, (s), \dots, (p)$; (2) est au-dessus de (1) ; (3) est au-dessus de (2) , etc. Rangeons les systèmes P_i de gauche à droite dans l'ordre croissant des indices. Faisons correspondre, à P_i , $p_i g_i$ points rangés g_i à g_i sur les parallèles $(1), (2), \dots, (p_i)$. On voit de suite sur le schéma que l_s est le nombre des points du schéma situé sur la droite (s) ou au-dessous de cette droite.

9° Posons $((s)) = l_s - l_{s-1}$ et formons la suite des entiers

$$((2)), ((3)), \dots, ((p)).$$

On aura

$$((2)) = ((3)) = \dots = ((p_k)) = \gamma_k = g + g_1 + \dots + g_k.$$

Quand s dépasse p_k , $((s))$ saute de γ_k à $\gamma_{k-1} = \gamma_k - g_k$. On a ainsi les entiers g_k et p_k .

$((p_k + 1)), \dots, ((p_{k-1}))$ sont égaux à γ_{k-1} , mais

$$((p_{k-1} + 1)) = \gamma_{k-2} = \gamma_{k-1} - g_{k-1},$$

ce qui fournit g_{k-1} et p_{k-1} et ainsi de suite.

En définitive : *chacun des deux systèmes d'entiers $((2)), \dots, ((p))$ et p_i, g_i ($i = 1, 2, \dots, k$) définit l'autre système sans ambiguïté.*

La connaissance des entiers $((s))$ assure celle des successifs.

La connaissance des nombres l_s assure aussi celle des successifs.

10° On vérifie sur-le-champ, sur la forme typique (5°),

que chaque successif réduit d'une unité le rang d'une matrice a telle que $a^p = 0$. On a donc, pour la matrice a (6°),

$$\text{rang de } a^s = \text{Rg} \cdot a^s = n - l_s.$$

Soit b une seconde n -aire, dont une certaine puissance s'annule. Si l'on a ϖ pour entier minimum tel que $a^\varpi = b^\varpi = 0$, les relations

$$\text{Rg} \cdot a^s = \text{Rg} \cdot b^s, \quad s = 1, 2, \dots, \varpi,$$

entraîneront, d'après ce qui précède, l'égalité des entiers l_s pour a et b , l'identité des successifs et enfin la similitude de a et b .

11° Nous sommes maintenant à même d'aborder la démonstration du théorème.

12° Soient les quatre n -aires $u, v, \theta = uv, \eta = vu$ et $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ les formes typiques (5°) de θ et η . On aura, pour des n -aires invertibles L et M convenablement choisies,

$$\begin{aligned} \theta &= L^{-1} \mathfrak{A} L, & \eta &= M^{-1} \mathfrak{B} M, \\ \mathfrak{A} &= UV, & \mathfrak{B} &= VU, \\ U &= LuM^{-1}, & V &= MvL^{-1}. \end{aligned}$$

13° θ et η ont même polynome caractéristique (4°); donc

$$|\rho E - \theta| = |\rho E - \eta| = \rho^{n-h} \varphi(\rho),$$

où $\varphi(\rho)$ est un polynome de degré h , avec $\varphi(0) \neq 0$. On aura pour les deux formes typiques

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ n-h \end{matrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ n-h \end{matrix}.$$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) &= |\rho e_h - A| = |\rho e_h - B|, & |A| &\neq 0, \\ \rho^{n-h} &= |\rho e_{n-h} - a| = |\rho e_{n-h} - b|, & |B| &\neq 0; \end{aligned}$$

$e_h = h$ -aire unité; $e_{n-h} = (n-h)$ -aire unité. A et B

sont invertibles tandis que $a^{\varpi} = b^{\varpi} = 0$ pour $\varpi \leq n - r$.

14° On peut écrire en toute hypothèse

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ n-h \end{matrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ n-h \end{matrix},$$

U_{11} , V_{11} = matrice h -aire ; U_{22} , V_{22} = matrice $(n-h)$ -aire ; U_{12} , V_{12} = tableau à h lignes et $n-h$ colonnes ; U_{21} , V_{21} = tableau à $n-h$ lignes et h colonnes.

15° On vérifie immédiatement que pour un entier positif s quelconque

$$(0) \quad U \mathfrak{B}^s = \mathfrak{A}^s U, \quad V \mathfrak{A}^s = \mathfrak{B}^s V.$$

En effet, par exemple,

$$U \mathfrak{B}^s = U \underbrace{VU \, VU \, \dots \, VU}_{s \text{ fois.}} = \underbrace{UV \, \dots \, UV}_{s \text{ fois.}} U = \mathfrak{A}^s U.$$

Il viendra

$$\begin{aligned} U \mathfrak{B}^s &= \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^s & 0 \\ 0 & b^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} B^s & U_{12} b^s \\ U_{21} B^s & U_{22} b^s \end{pmatrix} \\ &= \mathfrak{A}^s U = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & a^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^s U_{11} & A^s U_{12} \\ a^s U_{21} & a^s U_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$(1) \quad \begin{cases} U_{11} B^s = A^s U_{11} & U_{12} b^s = A^s U_{12}, \\ U_{21} B^s = a^s U_{21} & U_{22} b^s = a^s U_{22}. \end{cases}$$

De même

$$\begin{aligned} V \mathfrak{A}^s &= \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & a^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} A^s & V_{12} a^s \\ V_{21} A^s & V_{22} a^s \end{pmatrix} \\ &= \mathfrak{B}^s V = \begin{pmatrix} B^s & 0 \\ 0 & b^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^s V_{11} & B^s V_{12} \\ b^s V_{21} & b^s V_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{cases} V_{11} A^s = B^s V_{11} & V_{12} a^s = B^s V_{12}, \\ V_{21} A^s = b^s V_{21} & V_{22} a^s = b^s V_{22}. \end{cases}$$

16° Dans les relations (1) et (2) ci-dessus, faisons $s = \varpi$, $a^\varpi = b^\varpi = 0$ (13°). Il viendra notamment

$$0 = A^\varpi U_{12} = U_{21} B^\varpi = B^\varpi V_{12} = V_{21} A^\varpi,$$

et, comme $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$,

$$0 = U_{12} = U_{21} = V_{12} = V_{21}.$$

De là finalement, pour $s = 1$,

$$(3) \quad \begin{cases} U_{11}B = AU_{11} & U_{22}b = aU_{22}, \\ V_{11}A = BV_{11} & V_{22}a = bV_{22}, \end{cases}$$

et, comme $\mathfrak{A} = UV$, $\mathfrak{B} = VU$,

$$(4) \quad \begin{cases} A = U_{11}V_{11} & B = V_{11}U_{11}, \\ a = U_{22}V_{22} & b = V_{22}U_{22}. \end{cases}$$

A et B étant invertibles, U_{11} et V_{11} le sont aussi.

17° A et B sont semblables, car

$$U_{11}^{-1}AU_{11} = U_{11}^{-1}U_{11}V_{11}U_{11} = V_{11}U_{11} = B.$$

A et B ont mêmes successifs et sont (5°), par suite, identiques, étant toutes deux typiques.

Pour que θ et τ_i (12°) soient semblables, il faut et il suffit que

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

le soient; A et B le sont déjà; il faut donc que a et b soient semblables.

Comme (13°) $a^\varpi = b^\varpi = 0$, les considérations du 10° s'appliquent. Les conditions de similitude, nécessaires et suffisantes, sont

$$(5) \quad \begin{cases} Rg.a^s = Rg.b^s, \\ s = 1, 2, \dots, \varpi. \end{cases}$$

Or

$$Rg.A^s = Rg.A^s + Rg.a^s = h + Rg.a^s,$$

$$Rg.B^s = Rg.B^s + Rg.b^s = h + Rg.b^s.$$

18° Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, but et résultat de toute la présente discussion :

THÉORÈME. — *Soient les quatre matrices n-aires*
u, v, θ = uv, η = vu;

$$|\rho E - \theta| = |\rho E - \eta| = \rho^{n-h} \varphi(\rho), \quad \varphi(0) \neq 0,$$

E = n-aire unité.

Pour que θ et η soient semblables, il faut et il suffit que θ^s et η^s aient même rang pour s = 1, 2, ..., ω, où l'entier ω ne peut dépasser n - h.

19° Si θ et η sont semblables, **A** et **B** sont semblables et, étant typiques, sont identiques,

$$A = B = \Omega, \quad a = b = \omega.$$

Les relations (4) du 16° donnent

$$U_{11}V_{11} = V_{11}U_{11} = \Omega,$$

$$U_{22}V_{22} = V_{22}U_{22} = \omega;$$

U₁₁ et V₁₁ sont échangeables ainsi que U₂₂ et V₂₂.