

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 462-471

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__462_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Problèmes.* — I. Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy , trouver les courbes telles que la sous-tangente soit égale à $\frac{x^2}{y}$, x et y désignant les coordonnées du point de contact.

II. 1. Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz et la surface (Σ) dont l'équation est

$$x^2(x^2 + y^2 + z^2) - a^2 y^2 = 0;$$

indiquer la forme des sections de (Σ) par des plans parallèles aux plans de coordonnées.

2. Construire en particulier l'intersection (Γ) de (Σ) et du plan xOy , calculer l'aire de la région du plan limitée par (Γ) et l'une de ses asymptotes.

3. Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par (Σ) et par le cylindre

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Question de cours. — Mouvement d'un point matériel sur une courbe plane fixe sous l'action d'une force située dans le plan de la courbe; projections du mouvement sur les axes; équations intrinsèques (projections sur la normale et la tangente).

Application au pendule simple (donner seulement les équations du mouvement).

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. On considère la courbe (Γ) qui, rapportée à deux axes rectangulaires, a pour équation

$$(\Gamma) x^3 - a(x^2 - 3y^2) = 0.$$

Soit (C) le cercle de courbure au point $A (x = a, y = 0)$.

Soit (C') le cercle qui a pour équation

$$27(x^2 + y^2) - 41ax + 14a^2 = 0.$$

Tracer le contour ABCD situé au-dessus de Ox et limité par un arc de la courbe (Γ), un arc du cercle (C') l'axe des x et un arc du cercle (C).

Calculer l'aire de la portion du plan limitée par ce contour et le périmètre de ce contour.

II. Moment d'inertie d'un solide homogène limité par deux cylindres de rayons R et r' de même axe et de hauteur commune h :

1° Par rapport à l'axe de révolution;

2° Par rapport à une génératrice du petit cylindre;

3° Par rapport à une génératrice du grand cylindre.

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — Problèmes. — I. 1. Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, trouver une courbe telle que l'ordonnée à l'origine de la tangente en un point M soit égale à $\frac{y^2}{2\sqrt{ax}}$; x et y désignent les coordonnées du point M, a représente une longueur donnée.

2. L'une de ces courbes a pour équation

$$xy^2 = a(x + y)^2;$$

construire cette courbe.

3. Calculer l'aire du trapèze curviligne limité par un arc de la courbe précédente, les parallèles à Oy menées par l'extrémité de cet arc et l'axe Ox.

II. Ox, Oy, Oz étant trois axes de coordonnées rectangulaires et a une longueur donnée, calculer l'aire de la portion de la surface

$$2az = x^2 + y^2$$

qui se projette orthogonalement sur xOy à l'intérieur de la courbe

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Question de cours. — Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. Pendule composé.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. 1° Résoudre l'équation

$$f(x) = x^6 - 8x^5 + 25x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x = 0,$$

sachant que les racines sont commensurables;

2° Décomposer en fractions simples la fraction

$$\frac{f'(x)}{f(x)};$$

3° Tracer la courbe $y = F(x)$ quand x varie de $+2$ à $+\infty$.

Calculer l'aire limitée par cette courbe, l'axe des x et les droites $x = 3$, $x = 4$.

II. Par rapport à un système d'axes fixes OX , OY et à certain instant, un système ωx , ωy est défini de la façon suivante : les coordonnées de ω sont 1, 2 et l'angle $(\omega x, OX) = 30^\circ$, le point ω est animé d'une translation parallèle à OX de grandeur 3 et les axes ωx , ωy ont une vitesse angulaire de rotation autour de ω égale à 2. Le point situé sur ωx et d'abscisse $+1$ est le centre d'une rotation de vitesse angulaire 1. Trouver le centre instantané du mouvement résultant.

(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Question de cours. — Étudier les différents points d'un corps solide dans un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

Donner leur expression analytique en supposant que l'axe de rotation passe par l'origine et que le vecteur rotation a pour projections p , q , r .

Problèmes. — I. Construire la courbe plane (C) représentée dans un système de coordonnées rectangulaires par l'équation

$$x^2(x^2 + y^2) + 4ax^2y - 2a^2x^2 + 3a^2y^2 - 4a^3y + a^4 = 0,$$

où a désigne une longueur donnée; trouver le lieu du

milieu des cordes de (C) parallèles à l'axe des ordonnées. Calculer l'aire de la région du plan limitée par (C).

II. Dans un plan rapporté à un pôle O et à un axe polaire Ox, construire la courbe (Γ) représentée par l'équation

$$\rho = 4a \cos \omega - \frac{a}{\cos \omega},$$

où ω et ρ ont leur signification ordinaire, a représentant une longueur donnée.

Montrer qu'il existe sur Ox un point I tel que la droite IM qui le joint à un point quelconque M de (Γ) fasse avec Ox un angle triple de l'angle (Ox, OM).

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (Γ) quand a varie.

La courbe (Γ) présente une boucle, calculer l'aire de la portion de la sphère de centre O et de rayon $3a$ qui se projette à l'intérieur de cette boucle.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. On donne deux axes rectangulaires et les courbes

$$(A) \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{4x - x^2},$$

$$(B) \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 2}.$$

Construire la portion OP de (A) pour $0 \leq x \leq 1$ et la portion PQ de (B) pour $1 \leq x \leq 2$, trouver les tangentes de ces courbes au point commun, calculer les rayons de courbure. Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par l'arc OP en tournant autour de Ox et l'aire plane limitée par l'arc PQ, l'axe des x et les parallèles à Oy menées par P et Q.

II. Deux points pesants se meuvent sur une droite verticale, le premier passe en O au temps $t = 0$ avec une vitesse v_1 , le deuxième passe en O au temps θ avec une vitesse v_2 .

On demande l'instant où les deux mobiles se rencontrent, leur position et leurs vitesses à cet instant; discuter les signes de ces quantités (on supposera $\theta > 0$).

Déterminer ⁰ de façon que la rencontre n'ait pas lieu et trouver dans ce cas la distance des deux mobiles.

(Juillet 1911.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1^o Vérifier que la courbe représentée, en coordonnées rectangulaires planes, par les équations

$$(1) \quad x = (1 + t)e^t, \quad y = t^2 e^t$$

satisfait à l'équation différentielle

$$(2) \quad x dy^2 - y dx dy - y dx^2 = 0.$$

2^o Soient M un point de la courbe considérée, T le point où la tangente en M rencontre l'axe Ox, P la projection de M sur Ox, et K la projection de P sur MT. Montrer qu'il résulte de l'équation (2) que la longueur TK est égale à la distance de l'origine O à la tangente MT.

3^o Intégrer l'équation différentielle (2).

II. 1^o Connaissant le mouvement absolu d'un point libre M, et celui d'un système Z de forme invariable, en déduire la vitesse relative de M par rapport à Z ;

2^o Déduire du principe des vitesses virtuelles les conditions d'équilibre d'un corps solide libre soumis à des forces données.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étant donnée la série

$$f(x) = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \dots - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \dots$$

1^o Dire quel est son intervalle de convergence ;

2^o Pour $x = \frac{1}{2}$, calculer la somme d'un nombre suffisant de termes, de manière à obtenir $f\left(\frac{1}{2}\right)$ à moins de 0.001 ;

3^o Trouver, sous forme finie, l'expression de $f'(x)$; en déduire celle de $f(x)$,

4° Le service de l'expression obtenue pour contrôler la valeur précédemment trouvée par $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne un système d'axes rectangulaires $Oxyz$, dont l'axe Oz est vertical, et la surface S représentée par les équations

$$xv, \quad y = mv \sin u, \quad z = a \cos u,$$

où a, m sont des constantes données et u, v des paramètres variables.

1° Montrer que la surface S est engendrée par une droite horizontale mobile qui s'appuie sur une droite et un cercle fixes; 2° On imagine un point M qui se déplace sur la surface S , de manière qu'on ait

$$u = t, \quad v = f(t);$$

et l'on demande de déterminer la fonction $f(t)$ de manière que l'accélération de M soit constamment tangente en M à la surface S ; 3° Calculer le volume compris à l'intérieur de la surface S et entre les deux plans $x = a, x = 2a$.

II. Étudier, au point de vue cinématique, le mouvement le plus général d'un corps solide.

III. Un point matériel pesant, partant du repos, est astreint à rester sur une droite inclinée d'un angle α sur l'horizon, le long de laquelle il peut glisser sans frottement. On demande quel doit être cet angle α pour que la projection sur l'horizontale du chemin parcouru dans un temps donné soit maxima.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Démontrer que l'équation

$$x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$$

a deux racines réelles et deux seulement; et calculer ces racines à 0,01 près.

Nota. On pourra employer des méthodes graphiques, en se servant de papier quadrillé au millimètre. On remar-

quera que la dérivée de l'équation donnée a une racine rationnelle.
(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Construire la courbe C définie par les équations

$$x = te^t, \quad y = (t+1)e^t.$$

II. Vérifier que les coordonnées (x, y) d'un point de cette courbe satisfont à l'équation différentielle

$$(1) \quad x dy + y dx = 2y dx.$$

III. Soient M un point de la courbe considérée, S le point où la normale en M rencontre OX, P la projection de M sur OX, montrer qu'il résulte de (1) que

$$OS = 2 PM.$$

IV. Intégrer l'équation différentielle

$$(x^2 - 4y^2) dx^2 + 2xy dx dy + y^2 dy^2 = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1. Volume compris entre le plan $x = 0$, le plan $z = 0$, le cylindre $y^2 - x = 1$, et le paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

2. Calculer à $\frac{1}{100}$ près la plus grande racine de l'équation $x \log_{10} x + \frac{1}{10} = 0$.
(Juillet 1911.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$x^4 y - x^2 + y = 0.$$

Trouver la position des points d'inflexion.

Calculer le rayon de courbure en chaque point où y est maximum ou minimum.

Signification et calcul de l'intégrale définie

$$\int_{-h}^{+h} \frac{x^2 dx}{1+x^4}.$$

Cette intégrale a pour valeur limite

$$\frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{4}}$$

quand h augmente indéfiniment.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une balle est lancée au point A avec une vitesse initiale de 20 m : s sous un angle de 41° avec l'horizon.

La balle vient frapper le plan horizontal du point de départ en B; elle rebondit et décrit une nouvelle parabole avec une nouvelle vitesse initiale et un nouvel angle de départ. Elle frappe de nouveau le sol en C et ainsi de suite.

On admet que chaque fois que la balle rebondit sur le sol, la composante horizontale de la vitesse au départ est égale à la composante horizontale à l'arrivée au sol, mais que la composante verticale de la vitesse au départ n'est que les $\frac{2}{3}$ de la composante verticale à l'arrivée au sol.

On assimile la balle à un point et l'on néglige naturellement la résistance de l'air.

On demande de calculer :

1° La distance du point de départ initial à la position limite de la balle;

2° La durée totale de ce trajet;

3° Le nombre minimum de ricochets que peut faire la balle convenablement lancée pour atteindre une portée de 100^m et l'angle de départ sous lequel on doit la lancer pour qu'elle atteigne effectivement cette portée dans ce nombre minimum de bonds. (Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Déterminer les droites et les variétés de coniques qu'on peut placer sur la surface dont l'équation est

$$xy = 2z.$$

2° On considère l'équation différentielle

$$\frac{dx^2}{dt^2} + n^2 x = n^2 \lambda \sin qt,$$

où x représente l'abscisse d'un point mobile sur une droite, t le temps et n, λ et q des constantes positives.

Intégrer cette équation de sorte que la partie de l'intégrale qui provient de l'équation privée de son second membre soit nulle ainsi que sa dérivée pour $t = 0$.

Discuter la nature du mouvement défini par l'intégrale obtenue suivant les valeurs du rapport $\frac{q^2}{n^2}$.

Examiner le cas où l'on a $q^2 = n^2$.

Indiquer des problèmes de dynamique régis par l'équation différentielle.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Les racines de l'équation

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - 1 = 0$$

sont séparées par les nombres

$$-1, +0, +1, +\infty.$$

Calculer, à 0,001 près, la racine comprise entre 0 et 1.

2° Un plan horizontal monte d'un mouvement uniformément accéléré avec une accélération de 3^m,5 par seconde dirigée suivant la verticale.

Un poids de 60^{kg} est placé sur ce plan.

Calculer la pression entre le poids et le plan.

Faire le même calcul dans le cas de la descente du plan.

SOLUTION.

1° Portée totale :

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \frac{1}{1-\lambda} = 121^m,$$

$$\lambda = \frac{2}{3}, \quad v_0 = 20, \quad \alpha_0 = 41^0;$$

2° Durée du trajet :

$$\frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} \frac{1}{1-\lambda} = 8^s,03;$$

3° On a

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} \text{ pour } n \text{ bonds.}$$

Donc

$$\frac{\varphi_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} = 100,$$

d'où

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{100 g (1-\lambda)}{\varphi_0^2 (1-\lambda^n)};$$

donc

$$100 g (1-\lambda) < \varphi_0^2 (1-\lambda^n),$$

d'où

$$\lambda^n < 1 - \frac{100 g (1-\lambda)}{\varphi_0^2}.$$

De là

$$n > \frac{\log 12 - \log 2,20}{\log 3 - \log 2} \text{ ou } n > 4,1841.$$

Donc

$$n = 5.$$

On trouve ensuite $2\alpha_0 = 70^\circ 8'$ ou $\alpha_0 = 35^\circ 4'$.

(Octobre 1910.)