

G. FONTENÉ

Discussion des équations de degrés 2, 3, 4, 5 au point de vue des racines multiples

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 340-355

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__340_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A3c]

DISCUSSION DES ÉQUATIONS DE DEGRÉS 2, 3, 4, 5
AU POINT DE VUE DES RACINES MULTIPLES;

PAR M. G. FONTENÉ.

PREMIÈRE PARTIE.

1. *Semi-invariants*. — Les seules fonctions des coefficients qui figurent dans la discussion d'une équation algébrique entière $X = 0$, au point de vue des racines multiples, sont les semi-invariants (*voir* la Note précédente). On doit supposer qu'on a fait choix d'un système de semi-invariants fondamentaux.

2. *Constantes de Sturm*. — Parmi les expressions qu'on peut construire avec les semi-invariants fondamentaux, les suivantes jouent un rôle important dans la question des racines multiples; elles ne suffisent d'ailleurs pas à la résoudre.

Considérons une équation de degré m , dont les racines sont $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; nous désignons par $D_{m,p}$ la somme des produits des carrés des différences des racines prises p à p ; on aura par exemple

$$D_{m,3} = \Sigma (\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \gamma)^2.$$

Les quantités D sont en nombre $m - 1$, depuis $D_{m,2}$ ou $\Sigma(\alpha - \beta)^2$, jusqu'à $D_{m,m}$ qui est le produit des carrés des différences des racines. L'équation aux carrés des différences des racines donnerait à considérer $\frac{m(m-1)}{2}$ quantités, moins intéressantes d'ailleurs que les quantités D .

Le produit $D_{m,m}$ est à un facteur numérique près, positif ou négatif, le quotient du discriminant par $\alpha^{2(m-1)}$, α étant le coefficient de x^m ; on trouvera plus loin une règle pour le signe de ce facteur.

D'une manière générale, à des facteurs près qui sont ici sans importance, les quantités D sont les constantes de Sturm, c'est-à-dire les coefficients des termes de degré le plus élevé dans les polynomes de Sturm.

3. *Usage de ces constantes.* — Voici la part de ces constantes dans la discussion.

a. Si l'on a

$$(1) \quad D_{m,m} \neq 0,$$

l'équation n'a pas de racine multiple.

b. Si l'on suppose $D_{m,m} = 0$, l'équation a une racine double, soit $\alpha \equiv \beta$; on a alors, pour former $D_{m,m-1}$, les m quantités

$$\beta, \beta, \gamma, \delta, \dots,$$

et $D_{m,m-1}$ se réduit à

$$2 \times \Pi(\beta - \gamma)^2 (\beta - \delta)^2 \dots$$

Si l'on suppose

$$(2) \quad D_{m,m} = 0, \quad D_{m,m-1} \neq 0,$$

l'équation a simplement une racine double.

c. Si l'on suppose $D_{m,m-0}$, $D_{m,m-1}=0$, deux des $m-1$ quantités $\beta, \gamma, \dots$ sont égales, soit qu'on ait $\gamma=\delta$, auquel cas l'équation a deux racines doubles, soit qu'on ait $\beta=\gamma$, auquel cas l'équation a une racine triple. Dans les deux cas, on a, pour former $D_{m,m-2}$, m quantités où l'on peut trouver seulement $m-2$ quantités distinctes, et $D_{m,m-2}$ se réduit à un produit unique affecté d'un coefficient numérique. Si l'on suppose

$$(3) \quad D_{m,m}=0, \quad D_{m,m-1}=0, \quad D_{m,m-2} \neq 0,$$

l'équation a simplement deux racines doubles ou une racine triple.

On peut continuer ainsi, jusqu'au cas où, tous les D étant nuls, l'équation a une racine dont l'ordre de multiplicité est m .

4. *Insuffisance de ces constantes.* — Il restera à distinguer le cas de deux racines doubles du cas d'une racine triple, ... ; on devra pour cela faire intervenir autrement les semi-invariants.

5. *Équation du deuxième degré.* — Soit le polynome

$$ax^2 + 2bx + c;$$

outre a , qui est un semi-invariant sans intérêt, il existe un invariant qui est le discriminant $ac - b^2$ ou γ :

$$D_{2,2} = \frac{-2^2}{a^2} \gamma;$$

il y a une racine double si γ est nul.

6. *Équation du troisième degré.* — Soit le polynome

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d;$$

les semi-invariants fondamentaux sont

$$a, \quad \gamma = ac - b^2, \quad \delta = a^2d - 3abc + 2b^3;$$

le discriminant se construit avec ces semi-invariants.

On a

$$\begin{aligned} D_{3,3} &= \frac{-3^3}{a^4} (a^2d^2 + 4ac^3 - 6abcd + 4b^3d - 3b^2c^2) \\ &= \frac{-3^3}{a^6} (\delta^2 + 4\gamma^3) \end{aligned}$$

et

$$D_{3,2} = \frac{-2 \times 3^2}{a^2} \gamma;$$

la seconde expression du discriminant s'obtient directement sur le polynome $U^3 + 3\gamma U + \delta$, qui résulte de la transformation $U = ax + b$ (Note précédente).

On a alors ce Tableau :

$$\begin{array}{ll} 4\gamma^3 + \delta^2 \neq 0 & \text{pas de racine multiple,} \\ \left. \begin{array}{l} 4\gamma^3 + \delta^2 = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{array} \right\} & \text{une racine double,} \\ \left. \begin{array}{l} 4\gamma^3 + \delta^2 = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right\} & \text{une racine triple.} \end{array}$$

7. *Équation du quatrième degré.* — Soit le polynome

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e;$$

on utilise les semi-invariants

$$a, \quad \gamma = ac - b^2, \quad \delta = a^2d - 3abc + 2b^3,$$

et les invariants

$$\begin{aligned} S &= ae - 4bd + 3c^2, \\ T &= ace + 2bcd - ad^2 - eb^3 - c^3; \end{aligned}$$

ces cinq quantités sont liées (Note précédente) par la

relation

$$a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3 + \delta^2.$$

On a

$$D_{4,4} = \frac{4^4}{a^6}(S^3 - 27T^2),$$

$$D_{4,3} = \frac{-3 \times 4^3}{a^4}(2\gamma S - 3aT),$$

$$D_{4,2} = \frac{-3 \times 4^2}{a^2}\gamma.$$

Mais ces quantités ne suffisent pas à la discussion : δ et S vont intervenir autrement. Les conditions

$$S^3 - 27T^2 = 0, \quad 2\gamma S - 3aT = 0, \quad \gamma \neq 0,$$

relatives au cas de deux racines doubles ou d'une racine triple, donnent

$$S^2(a^2S - 12\gamma^2) = 0;$$

on peut donc avoir

$$S = 0,$$

ou bien

$$S = \frac{12\gamma^2}{a^2}, \quad T = \frac{8\gamma^3}{a^3}, \quad a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3,$$

d'où

$$\delta = 0,$$

d'après la relation écrite plus haut. Or, d'une manière générale, la condition $\delta = 0$ exprime (pour une équation du 4^e degré) que la somme de deux des racines est égale à la somme des deux autres. L'hypothèse $\delta = 0$ correspond donc ici au cas de deux racines doubles et ne convient pas au cas d'une racine triple; pour une racine triple on a, dès lors,

$$S = 0,$$

et la réciproque est exacte, car on ne peut avoir

$$S = 0, \quad \text{d'où} \quad T = 0,$$

(345)

avec

$$\delta = 0,$$

puisque cela donnerait

$$\gamma = 0.$$

On a ce Tableau :

$$\begin{array}{ll} S^3 - 27T^2 \neq 0 & \text{pas de racine multiple,} \\ \left. \begin{array}{l} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3\alpha T \neq 0 \end{array} \right\} & \text{une racine double,} \\ \left. \begin{array}{l} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3\alpha T = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \text{deux racines doubles ou une} \\ \text{racine triple, selon que } \delta \\ \text{ou } S \text{ est égal à zéro,} \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3\alpha T = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right\} & \text{une racine quadruple.} \end{array}$$

Il est facile de montrer qu'il y a deux racines doubles pour

$$2\gamma S - 3\alpha T = 0, \quad \delta = 0, \quad \gamma \neq 0;$$

la condition $\delta = 0$ donne en effet, d'après la relation qui a déjà servi dans le calcul inverse,

$$\alpha^2(\gamma S - \alpha T) = 4\gamma^3 \quad \text{ou} \quad \alpha^2\gamma S = 12\gamma^3,$$

ou, avec $\gamma \neq 0$,

$$S = \frac{12\gamma^2}{\alpha^2}, \quad T = \frac{8\gamma^3}{\alpha^3}, \quad S^3 - 27T^2 = 0.$$

On remarquera que, avec $S^3 - 27T^2 = 0$, on peut avoir

$$\delta = 0,$$

sans qu'il y ait deux racines doubles; les racines peuvent être $\alpha, \alpha, \alpha + h, \alpha - h$, aussi bien que $\alpha, \alpha, \beta, \beta$, pour que la somme de deux des racines soit égale à la

somme des deux autres Il faut garder la condition

$$2\gamma S - 3\alpha T = 0.$$

8. *Équation du cinquième degré.* — Soit le polynome

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f;$$

on aura à utiliser les semi-invariants

$$a,$$

$$\gamma = ac - b^2,$$

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

$$\Sigma = 3a^2df - 2a^2e^2 - 9abcf + abde \\ + 18ac^2e - 12acd^2 + 6b^3f - 15b^2ce + 10b^2d^2,$$

l'invariant

$$J = a^2f^2 - 10abef + 4acdf + 16ace^2 - 12ad^2e \\ + 16b^2df + 9b^2e^2 - 12bc^2f - 76bcde + 48bd^3 \\ + 48c^3e - 32c^2d^2,$$

et enfin le discriminant. La fonction Σ a moins de termes que la fonction $\Sigma - S^2$, indiquée également par Salmon; je la désigne par Σ parce que, si l'on fait

$$a = 0, \quad 5b = a', \quad 10c = 4b', \quad \dots, \quad f = e',$$

elle se réduit (sauf un facteur numérique) à $a'^2 S'$.

Les constantes de Sturm ont été calculées par M. Roberts (*Quarterly Journal*, t. IV, p. 175). Voici leurs valeurs, à des facteurs près qu'on peut négliger ici

$$D_{5,5} \quad \text{ou le discriminant, } a^4 f^4 + \dots,$$

$$D_{5,4} \quad \gamma J - 4S\Sigma + 8(S^3 - 27T^2),$$

$$D_{5,3} \quad 5\gamma S - 9\alpha T,$$

$$D_{5,2} \quad \gamma.$$

Si l'équation a deux racines doubles, exactement, on

peut étudier J , *qui est un invariant*, en supposant que ces racines sont zéro et ∞ ; on a ainsi

$$J = -32c^2d^2 \neq 0.$$

Si l'équation a une racine triple, en la supposant nulle ou infinie, on a $J = 0$. (Salmon fait observer que, si une équation de degré m a une racine multiple d'ordre p , avec $2p > m$, tous les invariants sont nuls ; c'est ainsi que, pour l'équation du quatrième degré, on avait

$$S = 0, \quad T = 0,$$

dans le cas d'une racine triple).

Si $D_{5,5}$ et $D_{5,4}$ sont nuls, il y a au moins une racine triple ; en supposant que cette racine soit zéro, ce qui est permis au point de vue des semi-invariants, on a

$$S = 3c^2;$$

selon qu'il y a une racine triple et une racine double, ou une racine quadruple, on a

$$S \neq 0 \quad \text{ou} \quad S = 0.$$

On a ce Tableau :

$D_{5,5} \neq 0$	pas de racine multiple,
$D_{5,5} = 0$	} une racine double,
$D_{5,4} \neq 0$	
$D_{5,5} = 0$	} deux racines doubles ou une
$D_{5,4} = 0$	
$D_{5,3} \neq 0$	
	racine triple, selon qu'on a
	$J \neq 0$ ou $J = 0$,
$D_{5,5} = 0$	} une racine double et une racine
$D_{5,4} = 0$	
$D_{5,3} = 0$	
$D_{5,2} \neq 0$	
	triple, ou une racine quadruple,
	selon qu'on a $S \neq 0$ ou $S = 0$;

si tous les D sont nuls, on a une racine quintuple.

La fonction

$$\Pi(\alpha + \beta - \gamma - \delta),$$

avec 15 facteurs, s'annule dans le cas de deux racines doubles et ne s'annule pas dans le cas d'une racine triple; c'est un semi-invariant de poids égal à 15, d'ordre égal à 12, contenant par exemple un terme en $\alpha^2 f^3$. Pour le calculer, on chercherait la condition qui exprime que la somme de deux racines est égale à la somme des deux autres; la racine restante étant celle de l'équation

$$\alpha x - m = 0,$$

on exprimerait que, dans l'équation

$$X : (\alpha x - m) = 0,$$

la somme de deux racines est égale à la somme des autres, ce qui donne

$$m^3 + 3bm^2 + (8ac - 5b^2)m + 16a^2d - 40abc + 25b^3 = 0;$$

on éliminerait m entre cette relation et la relation

$$X\left(\frac{m}{\alpha}\right) = 0.$$

On aurait à écarter la solution parasite $\alpha = 0$, à laquelle correspond la valeur

$$m = -5b.$$

9. *Remarque sur le signe du discriminant.* —

Bien que ce signe soit ici sans importance, je rappelle le fait suivant qui mériterait d'être plus connu.

Appelons discriminant, et désignons par Δ , le quotient par α du résultant des équations $X = 0$, $X' = 0$, résultant dont le signe ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les différences des racines des deux

équations. Ce résultat est, pour une équation du quatrième degré :

$$\begin{vmatrix} a & 4b & 6c & 4d & e & 0 & 0 \\ 0 & a & 4b & 6c & 4d & e & 0 \\ 0 & 0 & a & 4b & 6c & 4d & e \\ a & 3b & 3c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 3b & 3c & 3d \end{vmatrix},$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & 4b & 6c & 4d & e & 0 & 0 \\ 0 & a & 4b & 6c & 4d & e & 0 \\ 0 & 0 & a & 4b & 6c & 4d & e \\ 0 & -b & -3c & -3d & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -3c & -3d & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & -3c & -3d & -e \\ 0 & 0 & 0 & a & 3b & 3c & 3d \end{vmatrix},$$

et l'on en prend le quotient par a . Ce quotient contient un terme en $a^3 e^3$, provenant de

$$a^2 \times \begin{vmatrix} 0 & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

et ce terme est $a^3 e^3$. D'une manière générale, on aura le terme $a^m g^m$, que m soit pair ou impair.

Le discriminant ainsi défini,

$$\begin{array}{lll} ac - b^2, & & \\ a^3 d^2 + \dots & \text{ou} & \frac{\delta^2 + 4\gamma^3}{a^2}, \\ a^2 e^3 + \dots & \text{ou} & S^3 - 27T^2, \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

est de signe contraire au produit des carrés des

différences des racines pour un polynôme de degré $4k + 2$ ou $4k + 3$, tandis qu'il a le même signe que ce produit pour un polynôme du degré $4k$ ou $4k + 1$. (SALMON, Algèbre supérieure, p. 345; voir ci-dessus les expressions des quantités $D_{2,2}$, $D_{3,3}$ d'une part, $D_{4,4}$ d'autre part.)

Si, partant d'une équation du quatrième degré, on passe à une équation du troisième degré en faisant

$$a = 0, \quad 4b = a' \quad 6c = 3b', \quad 4d = 3c', \quad e = d'.$$

on a

$$S = -\frac{3}{4}\gamma', \quad T = -\frac{1}{16}\delta',$$

$$S^3 - 27T^2 = \frac{-3^3}{4^4}(4\gamma'^3 + \delta'^2) = \frac{-3^3}{4^4}a'^2(a'^2d'^2 + \dots),$$

avec un signe —. Il en sera de même chaque fois que l'on passera d'une équation de degré pair à l'équation de degré immédiatement inférieur.

DEUXIÈME PARTIE.

10. Je vais reprendre d'une manière différente l'étude de l'équation du quatrième degré

$$X \equiv ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0;$$

on obtiendra ici les expressions des racines multiples.

Le polynôme dérivé du polynôme X est $4X_1$, en posant

$$X_1 = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d.$$

On a

$$(1) \quad aX = X_1(ax + b) + R,$$

en posant

$$R = 3(ac - b^2)x^2 + 3(ad - bc)x + ae - bd.$$

On a ensuite

$$(2) \quad 3(ac - b^2)^2 X_1 = R \times [a(ac - b^2)x + 3b(ac - b^2) - a(ad - bc)] + aY,$$

en posant

$$Y = [2(ac - b^2)S - 3aT]x + [(ad - bc)S - 3bT].$$

Il faut alors distinguer deux cas; et c'est là un défaut de la méthode, les deux cas n'étant pas distincts dans le cas où l'équation a simplement une racine double.

$$I. \quad - ac - b^2 \neq 0.$$

11. Pour que le polynome X ait une racine double et une seule, il faut et il suffit que le polynome Y ait une racine et que cette racine annule le polynome R . Nous admettrons que le discriminant de X est $S^3 - 27T^2$, et nous écrirons les conditions

$$\begin{aligned} S^3 - 27T^2 &= 0, \\ 2\gamma S - 3aT &\neq 0. \end{aligned}$$

12. Si l'on veut que le polynome X ait deux racines doubles ou une racine triple, il faut et il suffit que les polynomes X et X_1 aient un plus grand commun diviseur R du second degré, non carré ou carré parfait. Dans les deux cas le polynome Y doit être identiquement nul, ce qui donne les conditions

$$\begin{aligned} S^3 - 27T^2 &= 0, \\ 2\gamma S - 3aT &= 0. \end{aligned}$$

On en conclut comme précédemment

$$\delta \times S = 0.$$

On peut d'ailleurs observer qu'on a

$$aY = (2\gamma S - 3aT)(ax + b) + \delta S.$$

Or le discriminant du polynome R, qui est bien du second degré avec l'hypothèse $\gamma \neq 0$, est

$$\gamma S + 3aT \quad \text{ou} \quad 3\gamma S,$$

eu égard à la condition

$$2\gamma S - 3aT = 0.$$

On a donc le résultat suivant :

$$\left. \begin{array}{l} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3aT = 0 \\ \delta \times S = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \delta = 0, & \text{deux racines double,} \\ S = 0, & \text{une racine triple :} \end{array}$$

d'où

il n'y a pas lieu d'accompagner la condition $\delta = 0$, de l'inégalité $S \neq 0$, car si l'on avait

$$\delta = 0, \quad S = 0, \quad \text{d'où} \quad T = 0,$$

on aurait

$$\gamma = 0,$$

d'après une relation du n° 5.

$$\text{II. } \text{---} \quad ac - b^2 = 0.$$

13. On a alors

$$R = 3(ad - bc)x + (ae - bd),$$

et, d'après l'égalité (2), le polynome Y est le produit du polynome R par $ad - bc$; on a

$$3(ad - bc)^2 = 2\gamma S - 3aT.$$

Il n'y a, par suite, rien de changé pour le cas d'une racine double; l'inégalité

$$ad - bc \neq 0$$

ne diffère pas de l'inégalité

$$2\gamma S - 3aT \neq 0.$$

Si l'on suppose

$$ad - bc = 0,$$

il ne peut y avoir de racine multiple que si le polynome R est identiquement nul, c'est-à-dire si l'on a

$$ae - bd = 0;$$

le polynome X est alors divisible par sa dérivée, il a une racine quadruple. La condition $ad - bc = 0$ équivaut à $2\gamma S - 3aT = 0$, qui se réduit d'ailleurs à $T = 0$; comme on a

$$aS = a(ae - bd) - 3b(ad - bc),$$

la condition $ae - bd = 0$ équivaut à $S = 0$, par suite à

$$S^3 - 27T^2 = 0.$$

14. En rapprochant les résultats obtenus, on retrouve le Tableau du n° 7.

15. REMARQUE I. — Lorsque le polynome X a une racine double unique, c'est la racine de l'équation $Y = 0$. Or, le hessien du polynome X est

$$H = (ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3 + \dots;$$

considérons le covariant bien connu

$$2S.H - 3T.X,$$

ou

$$[2(ac - b^2)S - 3aT]x^4 + 4[(ad - bc)S - 3bT]x^3 + \dots;$$

sa dérivée troisième, divisée par 24, est précisément le polynome Y . La racine double du polynome X est donc la racine du polynome

$$(2S.H - 3T.X)''' = 0.$$

C'est qu'en effet le covariant ci-dessus est

$$\frac{-a^4}{192} \Sigma(\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \delta)^2(x - \alpha)^4;$$

quand le polynome X a une racine double α , ce covariant se réduit à

$$\frac{-a^4}{192} \times 2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\gamma - \delta)^2(x - \alpha)^4.$$

16. REMARQUE II. — Salmon observe que, dans le cas de deux racines doubles, le polynome X et son hessien ne diffèrent que par un facteur constant; on a donc pour ce cas

$$\begin{aligned} \frac{ac - b^2}{a} &= \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} \\ &= \frac{ce - d^2}{e} = \frac{3T}{2S}; \end{aligned}$$

le covariant $2S.H - 3T.X$ est alors identiquement nul.

Les conditions

$$\begin{aligned} 2(ac - b^2)S - 3aT &= 0, \\ (ad - bc)S - 3bT &= 0 \end{aligned}$$

expriment directement que le polynome Y est identiquement nul; l'égalité

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b}$$

n'est pas autre chose que $\delta = 0$. L'équation en $\frac{1}{x}$ déduite de l'équation $X = 0$ rend compte des égalités

$$\begin{aligned} 2(ce - d^2)S - 3eT &= 0, \\ (be - ed)S - 3dT &= 0. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une racine triple α , le hessien est à un

facteur constant près $(x - \alpha)^4$. On a alors

$$S = 0, \quad T = 0,$$

et le covariant $2S.H - 3T.X$ est encore identiquement nul.

Si l'on se reporte à l'expression de ce covariant donnée plus haut pour le cas d'une racine double, on voit encore qu'il est identiquement nul pour $\gamma = \delta$ (deux racines doubles) et pour $\alpha = \gamma$ (une racine triple).

17. REMARQUE III. — On aurait pu employer la transformation $U = ax + b$, qui substitue au polynome X le polynome

$$U^4 + 6\gamma U^2 + 4\delta U + (\alpha^2 S - 3\gamma^2);$$

d'une part on aurait eu

$$\alpha Y = (2\gamma S - 3\alpha T)U + \delta S;$$

d'autre part on aurait eu

$$\alpha^2 R = 3\gamma U^2 + 3\delta U + (\alpha^2 S - 3\gamma^2),$$

donc le discriminant prend facilement la forme $\gamma S + 3\alpha T$.