

C. SERVAIS

Sur la courbure des biquadratiques gauches de première espèce

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 289-302

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__289_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M²6b]

**SUR LA COURBURE
DES BIQUADRATIQUES GAUCHES DE PREMIÈRE ESPÈCE;**

PAR M. C. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

1. Soient MNPQ un quadrangle inscrit dans une conique Σ , ABC le triangle diagonal, $A \equiv (MN, PQ)$, $B \equiv (MP, NQ)$, $C \equiv (MQ, NP)$; m la tangente au point M; $P_1 \equiv (m, QP)$, $N_1 \equiv (m, QN)$, $A_1 \equiv (m, CB)$, $B_1 \equiv (m, CA)$; a et b les droites AMN, BMP. Le rayon de courbure ρ de la conique Σ au point M est donné par la formule (1)

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{MN_1 \cdot MP_1}{N_1 P_1} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma) \sin(mb)}.$$

Si l'on désigne par C_1 le point (m, AB) on a

$$(MN_1 A_1 C_1) = -1, \quad (MP_1 B_1 C_1) = -1$$

ou

$$\frac{2}{MN_1} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MC_1}, \quad \frac{2}{MP_1} = \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}.$$

De ces égalités on déduit

$$\frac{2 N_1 P_1}{MN_1 \cdot MP_1} = \frac{A_1 B_1}{MA_1 \cdot MB_1};$$

par suite

$$\rho = \frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1 B_1} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma) \sin(mb)}.$$

(1) SERVAIS, *Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. I, 1906).

Une conique étant déterminée par un triangle conjugué ABC, un point M et la tangente m , le rayon de courbure en ce point est donné par la formule

$$\rho = \frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1 B_1} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma) \sin(mb)}.$$

A_1, B_1 désignent les points $(m, CB), (m, CA)$; a, b les droites MA, MB.

2. Une biquadratique gauche de première espèce est déterminée par le tétraèdre ABCD conjugué aux quadriques dont elle est l'intersection, un de ses points M_1 et la tangente m_1 en ce point. Le plan osculateur μ_1 au point M_1 de la courbe est le plan tangent en M_1 à l'hyperboloïde (H) conjugué au tétraèdre ABCD et ayant pour génératrice m_1 . Les arêtes opposées AB et CD, AC et BD, AD et BC déterminent dans le plan μ_1 les sommets opposés P et P_1 , Q et Q_1 , R et R_1 d'un quadrilatère complet et les droites p et p_1 , q et q_1 , r et r_1 projetant de M_1 les sommets P et P_1 , Q et Q_1 , R et R_1 sont en involution. C'est une involution de tangentes conjuguées à l'hyperboloïde (H); par suite l'un des rayons doubles est la génératrice m_1 , ou la tangente à la biquadratique au point M_1 .

3. Les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC sont coupés par une transversale m issue du point M, aux points A_1, B_1, C_1 ; les sommets A, B, C sont projetés de M suivant les droites a, b, c ; on a

$$(MA_1 B_1 C_1) = (mabc),$$

car si M_1 est le point (BC, AM) on a

$$(MA_1 B_1 C_1) = (M_1 A_1 CB) = (amcb) = (mabc).$$

4. Les faces BCD, ACD, ABD, ABC déterminent

sur la tangente m_1 les points A_1, B_1, C_1, D_1 situés respectivement sur $R_1 Q_1, RQ, RQ_1, R_1 Q$; on désigne par K_1 le point (m_1, PP_1) ; la propriété 3, appliquée successivement aux triangles $PP_1 Q, PP_1 Q_1$, et à la transversale m_1 issue du point M_1 , donne

$$(mq_1 pp_1) = (M_1 K_1 A_1 C_1),$$

$$(mq p_1 p) = (M_1 K_1 D_1 B_1).$$

D'après le n° 2, on a

$$(mq_1 pp_1) = (mq p_1 p),$$

donc

$$(M_1 K_1 A_1 C_1) = (M_1 K_1 D_1 B_1) = (K_1 M_1 B_1 D_1),$$

et le point K_1 est le conjugué de M_1 dans l'involution $(A_1 B_1, C_1 D_1)$. On déduit de là la construction du plan μ_1 , osculateur en M_1 à la biquadratique. On détermine le conjugué K_1 du point M_1 dans l'involution $(A_1 B_1, C_1 D_1)$, la droite $K_1 PP_1$ issue de ce point K_1 et s'appuyant sur les arêtes opposées AB, CD du tétraèdre $ABCD$, est dans le plan osculateur cherché (1).

5. Le plan osculateur μ_1 coupe le cône de sommet D , perspectif à la biquadratique, suivant une conique Σ tangente en M_1 à la droite m_1 et conjuguée au triangle $P_1 Q_1 R$. Le rayon de courbure de cette conique Σ , qui est aussi celui de la biquadratique, est donné par la formule (n° 1) :

$$\rho = \frac{M_1 A_1 \cdot M_1 B_1}{A_1 B_1} \frac{\sin(rq_1)}{\sin(m_1 r) \sin(m_1 q_1)}.$$

Les droites $r \equiv M_1 R, q_1 \equiv M_1 Q_1$ sont les traces sur le plan μ_1 des plans $M_1 AD, M_1 BD$; on les désignera pour la symétrie des notations par a_1, b_1 . Ainsi :

(1) C. SERVAIS, *Sur le complexe tétraédral* (*Mathesis*, 3^e série, t. IX, p. 7).

Une biquadratique gauche de première espèce étant déterminée par le tétraèdre conjugué ABCD, le point M_1 et la tangente m_1 en ce point, le rayon de courbure au point M_1 de la courbe est donné par la formule

$$\rho = \frac{M_1 A_1 \cdot M_1 B_1}{A_1 B_1} \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(m_1 a_1) \sin(m_1 b_1)},$$

les points A_1, B_1 sont les traces de la tangente m_1 , sur les faces CDB, CDA du tétraèdre; les droites a_1, b_1 sont les traces des plans $M_1 DA, M_1 DB$ sur le plan osculateur μ_1 à la courbe.

6. Le point M_1 détermine sur la biquadratique le quadruple M_1, M_2, M_3, M_4 . A ce quadruple correspond, dans l'homologie harmonique ayant pour centre le point A et pour plan d'homologie BCD, le quadruple M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 . Dans les homologies harmoniques :

$$(B, CDA), \quad (C, DAB), \quad (D, ABC),$$

on a les groupes de points correspondants :

$$\begin{array}{ll} (M_1, M_2, M_3, M_4), & (M'_2, M'_1, M'_4, M'_3), \\ (M_1, M_2, M_3, M_4), & (M'_3, M'_4, M'_1, M'_2), \\ (M_1, M_2, M_3, M_4), & (M'_4, M'_3, M'_2, M'_1). \end{array}$$

La biquadratique gauche est projetée du point M'_1 sur le plan μ_1 suivant une cubique plane; pour la facilité les projections des points considérés seront indiquées par les notations de ces points. La tangente m'_1 à la biquadratique gauche au point M'_1 rencontre les tangentes m_1, m_2, m_3, m_4 à la même courbe aux points M_1, M_2, M_3, M_4 ; par suite les points M_1, M_2, M_3, M_4 de la cubique forment un quadruple sur cette courbe; son tangentiel est la trace M'_1 de m'_1 sur le plan μ_1 . Cette trace est la projection du point M'_1 de la biqua-

dratique sur le plan μ_1 . Les homologues considérées plus haut montrent que les points M_1, M_4, M'_1, M'_4 de la biquadratique sont dans le plan ADM_1 ; donc les points M_1, M_4, M'_1 de la cubique plane sont sur la droite a_1 intersection des plans μ_1 et ADM_1 (n° 5). De même les points M_1, M_3, M'_2 de la cubique sont sur la droite b_1 , intersection des plans μ_1 et BDM_1 . Le rayon de courbure de la cubique plane égal à celui de la biquadratique est donc donné par la formule du n° 5. Par suite :

Soient M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 un quadruple d'une cubique plane, M_1 le point de la courbe ayant M'_1 pour tangentiel; A_1, B_1 les points d'intersection de la tangente m_1 au point M_1 avec les tangentes aux points M'_1, M'_2 ; a_1, b_1 les droites $M_1 M'_1, M_1 M'_2$; le rayon de courbure de la cubique au point M_1 est donné par la formule

$$\rho = \frac{M_1 A_1 M_1 B_1}{A_1 B_1} \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(m_1 a_1) \sin(m_1 b_1)}.$$

7. Les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la cubique formant un quadruple, le triangle $M_2 M_3 M_4$ est conjugué à la conique polaire du point M_1 . Le rayon de courbure au point M_1 de cette conique est donné par la formule

$$\rho' = \frac{M_1 A_2 M_1 B_2}{A_2 B_2} \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(m_1 a_1) \sin(m_1 b_1)},$$

A_2, B_2 sont les points $(m_1, M_2 M_3)$ $(m_1, M_2 M_4)$, a_1, b_1 les droites $M_1 M_4 M'_1, M_1 M_3 M'_2$. On sait que le rayon de courbure ρ de la cubique au point M_1 est égal à la moitié de ρ' ; par suite :

Si M_1, M_2, M_3, M_4 est un quadruple d'une cubique plane, le rayon de courbure de la courbe au point

M_1 est donné par la formule

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{MA_2 \cdot MB_2}{A_2 B_2} \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(m_1 a_1) \sin(m_1 b_1)},$$

A_2, B_2 sont les points de rencontre de la tangente m_1 au point M_1 avec les droites $M_2 M_3, M_2 M_4$; a_1, b_1 les droites $M_1 M_4, M_1 M_3$.

8. Des n^{os} 6 et 7 on déduit

$$2 \frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1 B_1} = \frac{M_1 A_2 \cdot M_1 B_2}{A_2 B_2}.$$

Ainsi : Soient M_1, M_2, M_3, M_4 un quadruple d'une cubique plane; M'_1, M'_2, M'_3 respectivement les points $(M_1 M_4, M_2 M_3)$, $(M_1 M_3, M_2 M_4)$, $(M_1 M_2, M_3 M_4)$; A_1, B_1 les points de rencontre de la tangente m_1 au point M_1 avec les tangentes aux points M'_1, M'_2 ; A_2, B_2 les points de rencontre de m_1 avec les droites $M_2 M_3, M_2 M_4$, on a

$$2 \frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1 B_1} = \frac{MA_2 \cdot MB_2}{A_2 B_2}.$$

9. Si C_1, C_2 sont les points de rencontre de la tangente m_1 avec la tangente au point M'_3 et la droite $M_3 M_4$ on a de même

$$2 \frac{MA_1 \cdot MC_1}{A_1 C_1} = \frac{MA_2 \cdot MC_2}{A_2 C_2}.$$

On déduit des deux dernières égalités

$$(M_1 A_1 B_1 C_1) = (M_1 A_2 B_2 C_2).$$

On peut établir autrement cette dernière propriété et déterminer le second point double de la projectivité déterminée par les trois couples de points $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$. Le tangentiel T du quadruple M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 est le corésiduel du groupe M_1, M_2, M_3, M_4 , et le point

M'_4 est le tangentiel du quadruple $M_1 M_2 M_3 M_4$. Les coniques circonscrites au quadrangle $M_1 M_2 M_3 M_4$ rencontrent la cubique en des couples de points EF alignés sur T et la droite EF engendre un faisceau projectif au faisceau de coniques. Parmi ces coniques on considère les coniques dégénérées $(M_1 M_1, M_2 M_3)$, $(M_1 M_3, M_2 M_4)$, $(M_1 M_2, M_3 M_4)$, la conique tangente à la cubique au point M_1 et celle qui passe par M'_4 . Elles coupent une seconde fois la droite m_1 issue de M_1 aux points A_2, B_2, C_2, M_1, M'_1 . Les rayons homologues du faisceau (T) sont $TM'_1, TM'_2, TM'_3, TM_1, TM'_4$; par suite

$$(A_1 B_1 C_1 M_1 M'_1) \bar{\Lambda} (A_2 B_2 C_2 M_1 M'_1).$$

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 un quadruple ayant pour tangentiel M'_1 ; M'_1, M'_2, M'_3 les points $(M_1 M_4, M_2 M_3)$, $(M_1 M_3, M_2 M_4)$, $(M_1 M_2, M_3 M_4)$; $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ les points de rencontre de la tangente $M_1 M'_1$ respectivement avec les tangentes aux points M'_1, M'_2, M'_3 et les droites $M_2 M_3, M_1 M_2, M_3 M_4$; on a

$$(A_1 B_1 C_1 M_1 M'_1) \bar{\Lambda} (A_2 B_2 C_2 M_1 M'_1).$$

10. La tangente m_1 au point M_1 de la biquadratique gauche est une génératrice d'un hyperboloïde (H) circonscrit à la courbe; soient s une génératrice de même système que m_1 ; M', P, Q trois points de la biquadratique μ', α_1, β_1 les plans $m_1 M', m_1 P, m_1 Q$; P', Q' , les traces de la droite $M_1 M'$ sur les plans sP, sQ . On a

$$s(M_1 P M' Q) \bar{\Lambda} m_1(M_1 P M' Q)$$

ou

$$(M_1 P' M' Q') \bar{\Lambda} (\mu_1 \alpha_1 \mu' \beta_1).$$

De cette égalité on déduit

$$\frac{M_1 M'}{\sin(\mu_1 \mu')} = \frac{M' P' M_1 Q'}{P' Q'} \frac{\sin(\alpha_1 \beta_1)}{\sin(\mu' \alpha_1) \sin(\mu_1 \beta_1)}.$$

Si l'on suppose que le point M' se rapproche indéfiniment de M_1 à la limite on a

$$\tau = \frac{1}{3} \frac{M_1 P_1 . M_1 Q_1}{P_1 Q_1} \frac{\sin(\alpha_1 \beta_1)}{\sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_1 \beta_1)},$$

τ est le rayon de torsion de la courbe au point M_1 ;
 P_1, Q_1 les traces m_1 sur les plans sP, sQ .

11. Les points P et Q étant quelconques sur la biquadratique, on peut leur substituer les points M'_1, M'_2 de la courbe situés respectivement sur les droites AM_1, BM_1 joignant le point M_1 aux sommets A, B du tétraèdre conjugué. A la droite PP_1 génératrice de (H) il faudra substituer la génératrice analogue issue de M'_1 ; cette droite n'est autre que la tangente m'_1 à la courbe au point M'_1 ; elle correspond à la droite m_1 dans l'homologie harmonique (A, BCD) , par conséquent le point m_1, m'_1 analogue à P_1 est le point $A_1 \equiv (m_1, BCD)$. De même l'analogie de Q_1 est le point $B_1 \equiv (m_1, ACD)$; quant aux plans m_1, M'_1 et m_1, M'_2 ils sont identiques à m_1, A et m_1, B . Par suite :

Une biquadratique gauche de première espèce étant déterminée par le tétraèdre conjugué $ABCD$, le point M_1 et la tangente m_1 en ce point, le rayon de torsion au point M_1 de cette courbe est donné par la formule

$$\tau = \frac{1}{3} \frac{M_1 A_1 . M_1 B_1}{A_1 B_1} \frac{\sin(\alpha_1 \beta_1)}{\sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_1 \beta_1)};$$

les points A_1, B_1 sont les traces de la tangente m_1 sur les faces CDB et CDA du tétraèdre; les plans α_1, β_1 projettent de la tangente m_1 les sommets A, B ; μ_1 est le plan osculateur à la courbe du point M_1 .

12. *Lemme.* — Soient P_1, M_1, M_2, P_2 les sommets d'un

quadrilatère gauche; $\alpha_1, \mu_1, \mu_2, \alpha_2$ les plans $P_2 P_1 M_1$, $P_1 M_1 M_2$, $M_1 M_2 P_2$, $M_2 P_2 P_1$; on a

$$\begin{aligned} & P_1 P_2 \cdot M_1 M_2 \sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \\ &= M_1 P_1 \cdot M_2 P_2 \sin(\alpha_1 \alpha_2) \sin(\mu_1 \mu_2). \end{aligned}$$

Soient m_1, m_2, f_1, g_1, a_1 les droites $P_1 M_1, P_2 M_2, P_1 P_2, M_1 M_2, M_1 P_2$. Dans les trièdres $(g_1 a_1 m_1)$, et $(f_1 a_1 m_2)$, et les triangles $P_1 P_2 M_1$ et $P_2 M_1 M_2$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\mu_1 \alpha_1)}{\sin(a_1 g_1)} &= \frac{\sin(\mu_1 \mu_2)}{\sin(a_1 m_1)}, & \frac{\sin(\mu_2 \alpha_2)}{\sin(f_1 a_1)} &= \frac{\sin(\alpha_1 \alpha_2)}{\sin(m_2 a_1)}, \\ \frac{\sin(f_1 a_1)}{\sin(a_1 m_1)} &= \frac{M_1 P_1}{P_1 P_2}, & \frac{\sin(a_1 g_1)}{\sin(m_2 a_1)} &= \frac{M_2 P_2}{M_1 M_2}; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & P_1 P_2 \cdot M_1 M_2 \sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \\ &= M_1 P_1 \cdot M_2 P_2 \sin(\alpha_1 \alpha_2) \sin(\mu_1 \mu_2). \end{aligned}$$

13. Soient M_1, M_2 deux points correspondants d'une biquadratique gauche; les tangentes m_1, m_2 en ces points sont deux génératrices de même système d'une quadrique (H) circonscrite à la courbe. Les rayons d'osculution p_1, p_2 en ces points sont deux génératrices de l'autre système; si q est une génératrice de ce système, on désigne par P_1, Q_1, P_2, Q_2 les points $m_1 p_2, m_1 q, m_2 p_1, m_2 q$; par $\alpha_1, \beta_1, \mu_1, \alpha_2, \beta_2, \mu_2$ les plans $(m_1 p_2), (m_1 q), (m_2 p_1), (m_2 q), (m_2 p_2)$; par τ_1 et τ_2 les rayons de torsion de la biquadratique aux points M_1 et M_2 . Cela étant on a (10)

$$\begin{aligned} 9\tau_1\tau_2 &= \frac{M_1 P_1 \cdot M_1 Q_1 \cdot M_2 P_2 \cdot M_2 Q_2}{P_1 Q_1 \cdot P_2 Q_2} \\ &\times \frac{\sin(\alpha_1 \beta_1) \sin(\alpha_2 \beta_2)}{\sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_1 \beta_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \sin(\mu_2 \beta_2)}. \end{aligned}$$

Dans les quadrilatères gauches $P_1 M_1 M_2 P_2, M_1 Q_1 Q_2 M_2$

et $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ on a

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_2 \cdot M_1 M_2 \sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \\ \quad = M_1 P_1 \cdot M_2 P_2 \sin(\alpha_1 \alpha_2) \sin(\mu_1 \mu_2), \\ Q_1 Q_2 \cdot M_1 M_2 \sin(\alpha_1 \beta_1) \sin(\alpha_2 \beta_2) \\ \quad = M_1 Q_1 \cdot M_2 Q_2 \sin(\alpha_1 \alpha_2) \sin(\beta_1 \beta_2), \\ P_1 P_2 \cdot Q_1 Q_2 \sin(\mu_1 \beta_1) \sin(\mu_2 \beta_2) \\ \quad = P_1 Q_1 \cdot P_2 Q_2 \sin(\mu_1 \mu_2) \sin(\beta_1 \beta_2); \end{array} \right.$$

par suite

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)} \frac{\overline{M_1 Q_1}^2 \overline{M_2 Q_2}^2}{\overline{P_1 Q_1}^2 \overline{P_2 Q_2}^2}.$$

Ainsi : Si m_1, μ_1, τ_1 et m_2, μ_2, τ_2 désignent les tangentes, les plans osculateurs et les rayons de torsion d'une biquadratique gauche en deux points correspondants M_1 et M_2 ; P_1 et P_2 les points $m_1 \mu_2, m_2 \mu_1$; Q_1, Q_2 les points d'appui sur m_1 et m_2 d'une sécante issue d'un point quelconque de la courbe, on a

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)} \frac{\overline{M_1 Q_1}^2 \overline{M_2 Q_2}^2}{\overline{P_1 Q_1}^2 \overline{P_2 Q_2}^2}.$$

14. Si la quadrique (H) est un paraboloïde, on peut supposer la génératrice g à l'infini, on a dans cette hypothèse

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)}.$$

Ainsi : Si les tangentes m_1 et m_2 en deux points correspondants d'une biquadratique gauche sont des génératrices d'un paraboloïde, on a la relation

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)}.$$

15. Si les points correspondants M_1, M_2 sont tels

que le plan osculateur en l'un d'eux passe par l'autre, on a $P_1 \equiv M_1$, $P_2 \equiv M_2$; par suite

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

Donc : *Si les points M_1 , M_2 de la biquadratique gauche sont tels que le plan osculateur en l'un d'eux passe par l'autre, on a*

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

16. Soient m_1 , μ_1 , τ_1 la tangente, le plan osculateur et le rayon de torsion en un point M_1 d'une cubique gauche; s , P , Q une sécante et deux points quelconques de la courbe; P_1 , Q_1 les traces de m_1 sur les plans sP_1 , sQ_1 ; α_1 , β_1 les plans m_1P , m_1Q ; on a

$$\tau_1 = \frac{1}{3} \frac{M_1P_1 \cdot M_1Q_1}{P_1Q_1} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_1\beta_1)} \quad (1).$$

On déduit de cette formule les théorèmes suivants :

Si m_1 , μ_1 , τ_1 et m_2 , μ_2 , τ_2 désignent les tangentes, les plans osculateurs et les rayons de torsion d'une cubique gauche en deux points quelconques M_1 et M_2 ; P_1 et P_2 les points $m_1\mu_2$, $m_2\mu_1$; Q_1 , Q_2 les points d'appui sur m_1 et m_2 d'une droite issue d'un point de la courbe arbitrairement choisi, on a

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)} \frac{\overline{M_1Q_1}^2 \cdot \overline{M_2Q_2}^2}{\overline{P_1Q_1}^2 \cdot \overline{P_2Q_2}^2}.$$

Si les tangentes m_1 et m_2 sont des génératrices d'un parabolôïde circonscrit à la cubique gauche,

(1) C. SERVAIS, *Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches* (Mémoires de l'Académie royale de Belgique, 1906, p. 12).

on a

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

17. Les égalités (α) du n° 13 permettent d'écrire la valeur de l'expression $9\tau_1\tau_2$ sous la forme suivante

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\alpha_1\alpha_2)} \frac{\sin^2(\alpha_1\beta_1)\sin^2(\alpha_2\beta_2)}{\sin^2(\mu_1\beta_1)\sin^2(\mu_2\beta_2)},$$

on peut utiliser cette relation dans les n°s 13 et 16.

18. Soient (C_1) et (C_2) deux courbes gauches quelconques, m_1, μ_1, τ_1 et m_2, μ_2, τ_2 les tangentes, les plans osculateurs et les rayons de torsion en deux points M_1, M_2 situés respectivement sur (C_1) et (C_2) ; P_1, P_2 les points $m_1\mu_2, m_2\mu_1$; Q_1, Q_2 deux points quelconques pris respectivement sur m_1 et m_2 ; l'expression

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2} \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)} \frac{\overline{M_1Q_1}^2 \cdot \overline{M_2Q_2}^2}{\overline{P_1Q_1}^2 \cdot \overline{P_2Q_2}^2},$$

est projective.

Soient $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ les plans $m_1M_2, m_1Q_2, m_2M_1, m_2Q_1$; à la figure considérée correspond, dans une projectivité quelconque, une seconde figure dont les éléments seront représentés par les notations des éléments homologues de la première, mais accentuées. Pour les courbes (C_1) et (C'_1) , (C_2) et (C'_2) on a ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_1} \frac{M_1P_1 \cdot M_1Q_1}{P_1Q_1} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_1\beta_1)} \\ &= \frac{1}{\tau'_1} \frac{M'_1P'_1 \cdot M'_1Q'_1}{P'_1Q'_1} \frac{\sin(\alpha'_1\beta'_1)}{\sin(\mu'_1\alpha'_1)\sin(\mu'_1\beta'_1)}, \\ & \frac{1}{\tau_2} \frac{M_2P_2 \cdot M_2Q_2}{P_2Q_2} \frac{\sin(\alpha_2\beta_2)}{\sin(\mu_2\alpha_2)\sin(\mu_2\beta_2)} \\ &= \frac{1}{\tau'_2} \frac{M'_2P'_2 \cdot M'_2Q'_2}{P'_2Q'_2} \frac{\sin(\alpha'_2\beta'_2)}{\sin(\mu'_2\alpha'_2)\sin(\mu'_2\beta'_2)}. \end{aligned}$$

(¹) C. SERVAIS, *La courbure et la torsion dans la collinéation et*

Ces égalités montrent que l'expression

$$T \equiv \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{M_1 P_1 \cdot M_1 Q_1 \cdot M_2 P_2 \cdot M_2 Q_2}{P_1 Q_1 \cdot P_2 Q_2} \\ \times \frac{\sin(\alpha_1 \beta_1) \sin(\alpha_2 \beta_2)}{\sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \sin(\mu_1 \beta_1) \sin(\mu_2 \beta_2)}$$

est projective.

D'après les égalités (a) du n° 13 l'expression T peut s'écrire

$$T \equiv \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)} \frac{\overline{M_1 Q_1}^2 \cdot \overline{M_2 Q_2}^2}{P_1 Q_1 \cdot P_2 Q_2},$$

on a aussi

$$T \equiv \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{\overline{M_1 M_2}^2}{\sin^2(\alpha_1 \alpha_2)} \frac{\sin^2(\alpha_1 \beta_1) \sin^2(\alpha_2 \beta_2)}{\sin^2(\mu_1 \beta_1) \sin^2(\mu_2 \beta_2)}.$$

Ces expressions sont donc projectives.

19. Si l'on suppose Q_1 et Q_2 à l'infini, T se réduit à

$$\frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)}.$$

Cette expression n'est donc pas altérée par une transformation affine.

20. Si les plans osculateurs en M_1 et M_2 passent respectivement par les points M_2 et M_1 , on a $P_1 \equiv M_1$, $P_2 \equiv M_2$ et l'expression T se réduit à :

$$\frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{\overline{M_1 M_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)} \quad (1);$$

Cette expression est donc projective.

la réciprocité (Mémoires in-8 de l'Académie royale de Belgique, 1898, p. 7).

(¹) DEMOULIN, *Sur la théorie générale des congruences rectilignes (Comptes rendus, 1900, p. 1702).*

21. Soient M_1, P_1, Q_1 trois points quelconques d'une génératrice m_1 d'une quadrique Σ ; μ_1, α_1, β_1 les plans tangents en ces points; R_1, R'_1 les rayons de courbure principaux de la surface Σ au point M_1 ; on a

$$R_1 R'_1 = - \frac{\overline{M_1 P_1}^2 \cdot \overline{M_1 Q_1}^2}{\overline{P_1 Q_1}^2} \frac{\sin^2(\alpha_1 \beta_1)}{\sin^2(\mu_1 \alpha_1) \sin^2(\mu_1 \beta_1)} \quad (1).$$

On déduit de cette formule, par les égalités (a) du n° 13, les théorèmes suivants :

Soient M_1 et M_2 deux points quelconques d'une quadrique Σ ; m_1 et a_1, m_2 et a_2 les génératrices passant par ces points; b une génératrice du système $(a_1, a_2, \dots)$; P_1, P_2, Q_1, Q_2 les points $m_1 a_2, m_2 a_1, m_1 b, m_2 b$; R_1 et R'_1, R_2 et R'_2 les rayons de courbure principaux aux points M_1 et M_2 ; μ_1 et μ_2 les plans tangents à Σ en M_1 et M_2 ; on a

$$R_1 R'_1 \cdot R_2 R'_2 \sin^4(\mu_1 \mu_2) = \overline{P_1 P_2}^4 \frac{\overline{M_1 Q_1}^4 \cdot \overline{M_2 Q_2}^4}{\overline{P_1 Q_1}^4 \cdot \overline{P_2 Q_2}^4}.$$

Si la quadrique Σ est un paraboloïde, on a

$$R_1 R'_1 \cdot R_2 R'_2 \sin^4(\mu_1 \mu_2) = \overline{P_1 P_2}^4.$$