

Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 175-179

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__175_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que toute fonction elliptique aux périodes $2\omega, 2\omega'$ est une fonction rationnelle de $p u$ et $p' u$.*

II. *Soit $\wp = f(\theta)$ l'équation d'une courbe plane C en*

coordonnées polaires. Sur le rayon vecteur OM d'un point quelconque M de cette courbe on porte une longueur constante MP égale à a et dans le sens MO. Déterminer $f(\theta)$ de façon que, lorsque le point M parcourt la courbe C, l'aire balayée par le rayon vecteur OP soit égale à l'arc que décrit le point M, multiplié par une longueur constante b. On emploiera les fonctions de Jacobi et l'on supposera $2a > b$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La fonction pu satisfaisant à la relation*

$$p'^2 u = 4pu(p^2 u - 1),$$

trouver la fonction primitive de

$$\frac{p^6 u}{(pu - 1)^2}.$$

(Juin 1910.)

Lille.

PREMIÈRE QUESTION. — *Étude des valeurs réelles de la fonction pu :*

1° *Lorsque, l'une des périodes étant réelle, l'autre est purement imaginaire;*

2° *Lorsque les deux périodes sont imaginaires conjuguées.*

Calculer, dans les deux cas, les périodes 2ω , $2\omega'$, en fonction des invariants g_1 , g_2 .

Construire, dans les deux cas, la courbe

$$x = pu, \quad y = p'u.$$

DEUXIÈME QUESTION. — *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$(1) \quad f(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 :$$

1° *Définir ce qu'on entend par une intégrale complète; faire voir comment on peut, d'une pareille intégrale, déduire toutes les autres;*

2° *Montrer comment l'intégrale singulière peut être déduite directement de l'équation (1).*

(Juillet 1910.)

1° On considère la série

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{n^2 a + n z}.$$

A quelle condition doit satisfaire la constante a pour que cette série soit convergente quel que soit z ?

2° Cette condition étant supposée remplie, démontrer que la somme $\Theta(z)$ de cette série est une fonction entière de z qui admet deux périodes, l'une de première, l'autre de troisième espèce; faire voir que $\Theta(z)$ s'annule une fois et une seule dans chaque parallélogramme construit sur ces deux périodes; donner l'expression générale des zéros de $\Theta(z)$.

3° Établir la relation qui existe entre la fonction Θ et la fonction σ construite avec les mêmes périodes. Décomposer $\Theta(z)$ en un produit de facteurs primaires.

(Novembre 1910.)

Lyon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On considère l'équation

$$g(x) + \lambda \int_0^{2\pi} g(y) \cos(x+y) dy = 1,$$

où λ est une constante donnée et g une fonction inconnue.

1° Dans l'hypothèse $\lambda = 1$, donner la solution de cette équation, en se servant des formules de Fredholm;

2° Comment faut-il choisir λ pour que cette équation cesse d'avoir une solution unique? Que se passe-t-il alors?

II. Dans un plan, rapporté à des coordonnées polaires d'origine O et d'axe polaire Ou , on désigne par y ($0 \leq y \leq 2\pi$) l'angle polaire d'un point quelconque du cercle (C) de centre O et de rayon 1; et par a , x ($a > 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$) les coordonnées polaires d'un point P quelconque. Soit alors W le potentiel en P de la double couche de moment $g(y)$ disposée sur le cercle (C) .

1° Mettre W sous la forme

$$W = - \int_0^{2\pi} g(y) A(x, y | a) dy;$$

et, dans l'hypothèse $a < 1$, développer A et W suivant les puissances entières de a ;

2° Montrer que, si W est nul, quel que soit x , pour une valeur particulière quelconque de a , inférieure à 1, W est identiquement nul, ainsi que la fonction g ;

3° En conclure que, pour $a < 1$, le noyau A est fermé et que la suite

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

est fermée;

4° Trouver les valeurs et les fonctions fondamentales du noyau A , pour $a < 1$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Épure (données en centimètres) : intersection d'un cône et d'un cylindre. — Le cône, limité à sa base et à son sommet, a pour base dans le plan horizontal une circonférence (centre $x = 0$, $y = 10$, $z = 0$; rayon = 8). Le sommet est le point $x = 0$, $y = 10$, $z = 16$. Le cylindre a pour base un cercle de front (centre $x = 3$, $y = 10$, $z = 5$; rayon = 5); les génératrices sont horizontales, et inclinées à 45° sur le plan vertical de gauche avant à droite arrière. Représenter la partie solide du cône extérieure au cylindre. (Juillet 1910.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Établir les formules relatives au passage à travers la couche attirante pour les dérivées premières d'un potentiel de double couche.

II. On imagine les opérations de Fredholm fournies par les divers noyaux $A(x, y)$ qui satisfont à un même système, supposé donné, d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f(x) \frac{\partial A}{\partial x} + \varphi(x) A = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + g(y) \frac{\partial A}{\partial y} + \psi(y) A = 0:$$

- 1° *Montrer que ces opérations forment un groupe;*
 2° *Montrer qu'à une opération quelconque de ce groupe correspond, en général, une opération du même groupe qui en est l'inverse;*
 3° *Déduire de là une méthode de résolution des équations de Fredholm qui correspondent à un noyau A de l'espèce considérée; et comparer les formules obtenues à celles que donne la méthode de Fredholm;*
 4° *Examiner le cas singulier, dans la résolution des équations de Fredholm de ce même type.*

Nota. — Toutes les intégrales définies correspondant aux opérations et équations de Fredholm considérées seront supposées prises entre les mêmes limites constantes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit

$$k = \sin \theta, \quad k_1 = \sin \theta_1, \quad k_2 = \sin \theta_2, \quad \dots;$$

$$1 + k_1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}, \quad 1 + k_2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta_1}{2}}, \quad 1 + k_3 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta_2}{2}}, \quad \dots$$

Enfin

$$\frac{\pi}{2K} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \cdot \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \dots$$

Calculer K avec l'approximation que comportent les Tables à 7 décimales, sachant que $k^2 = \frac{1}{2}$. On rappelle que $\pi = 3,14159265 \dots$ (Novembre 1910.)