

G. VALIRON

Note sur les déterminants de Wronsky

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 151-153

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__151_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[C1a]

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS DE WRONSKY;

PAR M. G. VALIRON.

Désignons par la notation

$$F_n(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

le déterminant de Wronski relatif aux fonctions y_1 , $y_2, \dots, y_n$,

$$F_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

On sait qu'étant donné un déterminant D de degré n , si l'on désigne par $D \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$ le déterminant obtenu en supprimant les colonnes de rang 1 et 2, et les lignes de rang $n-1$ et n , et par $\Delta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$ le déterminant

obtenu en prenant les termes de la $n^{\text{ième}}$ et de la $(n-1)^{\text{ième}}$, ligne et ceux de la première et deuxième colonnes du déterminant adjoint, on a la relation

$$\Delta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix} = -D \times D \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Prenons

$$D = F_n(y_1, y_2, \dots, y_n);$$

on aura

$$D \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix} = F_{n-2}(y_3, \dots, y_n)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix} \\ = -F_2[F_{n-1}(y_2, y_3, \dots, y_n), F_{n-1}(y_1, y_3, \dots, y_n)], \end{aligned}$$

comme on le constate aisément [le mineur de y_1^{n-2} dans F_n est égal à la dérivée de $F_{n-1}(y_2, \dots, y_n)$].

On obtient ainsi la relation

$$\begin{aligned} F_2[F_{n-1}(y_2, y_3, \dots, y_n), F_{n-1}(y_1, y_3, \dots, y_n)] \\ = F_n(y_1, y_2, \dots, y_n) F_{n-2}(y_3, \dots, y_n), \end{aligned}$$

qui s'écrit encore en supposant que la fonction

$$F_{n-2}(y_3, \dots, y_n)$$

n'est pas identiquement nulle,

$$\begin{aligned} F_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ = \frac{[F_{n-1}(y_1, y_3, \dots, y_n)]^2}{F_{n-2}(y_3, \dots, y_n)} \frac{d}{dx} \left[\frac{F_{n-1}(y_2, \dots, y_n)}{F_{n-1}(y_1, y_3, \dots, y_n)} \right]. \end{aligned}$$

C'est cette relation que je voulais établir. On peut en déduire que lorsque $F_n(y_1, y_2, \dots, y_n)$ est identiquement nul il existe entre les fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n$ une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Car, en supposant $F_{n-1}(y_1, y_3, \dots, y_n)$ non iden-

tiquement nul, on aura

$$\frac{F_{n-1}(y_2, \dots, y_n)}{F_{n-1}(y_1, y_2, \dots, y_n)} \equiv C_1,$$

d'où

$$F_{n-1}[(y_2 - C_1 y_1), y_3, \dots, y_n] \equiv 0,$$

et ainsi de suite.