

AMSLER

Sur les suites récurrentes

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 90-95

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__90_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[H12d]

SUR LES SUITES RÉCURRENTES;

PAR M. AMSLER,

Professeur au Collège de Dieppe.

1. Soit $\varphi(x)$ un polynome qui soit au plus de degré $m-1$; soit $f(x)$ un polynome de degré m premier avec $\varphi(x)$ et égal au produit de m facteurs binomes différents :

$$f(x) \equiv (x-a)(x-b)\dots(x-l).$$

On peut poser

$$(1) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{L}{x-l},$$

A, B, ..., L étant des constantes.

Sous la réserve que x soit supérieur en module aux quantités telles que a , on peut développer les deux membres suivant les puissances décroissantes de x . Nous égalons les coefficients des puissances de x dans les deux membres après avoir posé

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{u_0}{x} + \frac{u_1}{x^2} + \dots + \frac{u_n}{x^{n+1}} + \dots$$

et remarqué qu'on a

$$\frac{A}{x-a} = A \left(\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \dots \right).$$

Nous obtenons ainsi les équations

$$\begin{aligned} u_0 &= A + B + \dots + L, \\ u_1 &= Aa + Bb + \dots + Ll, \\ &\dots\dots\dots, \\ u_n &= Aa^n + Bb^n + \dots + Ln^n. \end{aligned}$$

On sait d'ailleurs calculer les constantes telles que A, par exemple :

$$A = \frac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}.$$

Nous allons étudier la suite $u_0, u_1, u_2, \dots, u_3, \dots$ dont l'échelle de récurrence est $f(x)$. Plus spécialement, nous allons établir une formule d'addition pour les u :

2. *Forme symbolique de a^n .* — Considérons les m équations suivantes, où les inconnues sont les Aa^n :

$$\begin{aligned} u_n &= Aa^n + Bb^n + \dots + Ln^n, \\ u_{n+1} &= aAa^n + bBb^n + \dots + lLl^n, \\ &\dots\dots\dots, \\ u_{n+m-1} &= a^{m-1}Aa^n + b^{m-1}Bb^n + \dots + l^{m-1}Ln^n. \end{aligned}$$

Imaginons que les indices des u soient portés en exposants.

Formons une combinaison linéaire des équations au moyen des coefficients du polynôme

$$(x-b)(x-c)\dots(x-l).$$

Dans la combinaison, l'inconnue Aa^n demeure seule et l'on a symboliquement

$$Aa^n = \frac{(u-b)(u-c)\dots(u-l)u^n}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}$$

ou, en se rappelant la valeur de A,

$$a^n = \frac{(u-b)(u-c)\dots(u-l)}{\varphi(a)} u^n.$$

Cette formule s'interprète de la façon suivante : on effectue le second membre et l'on met en indices les exposants des u .

3. *Addition des u .* — Posons

$$a^n = \frac{(u-b)(u-c) \dots (u-l)}{\varphi(a)} u^n,$$

$$a^{n'} = \frac{(v-b)(v-c) \dots (v-l)}{\varphi(a)} v^{n'},$$

v étant une lettre qui remplace u pour les besoins du calcul.

On a

$$a^{n+n'} = \frac{(u-b)(u-c) \dots (u-l)(v-b)(v-c) \dots (v-l)}{[\varphi(a)]^2} u^n v^{n'}.$$

Pour calculer $u_{n+n'}$, il faut former

$$\begin{aligned} \sum A a^{n+n'} &= \sum \frac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c) \dots (a-l)} a^{n+n} \\ &= u^n v^{n'} \sum \frac{(u-b) \dots (u-l)(v-b) \dots (v-l)}{(a-b) \dots (a-l) \varphi(a)}. \end{aligned}$$

Je dis que le Σ n'est autre que le polynome

$$\pi(u, v) = \frac{f(u)P(v) - f(v)P(u)}{u - v},$$

où l'on a posé

$$P(u) = \sum \frac{(u-b)(u-c) \dots (u-l)}{(a-b) \dots (a-l) \varphi(a)}.$$

En effet, $\pi(u, v)$ et le Σ à deux variables u et v peuvent être regardés comme deux polynomes en u ; ils sont tous deux au plus de degré $m-1$; il suffit alors de prouver qu'ils coïncident pour les m valeurs $a, b, c, \dots, l$. Si, dans le Σ on fait $u = a$, on trouve

$$\frac{(v-b)(v-c) \dots (v-l)}{\varphi(a)}.$$

(93)

Si dans π on fait $u = a$, on trouve

$$\frac{(v-b) \dots (v-l)}{\varphi(a)},$$

résultat identique au premier.

Reste à indiquer le calcul pratique de $P(u)$; pour cela je remarque que

$$P(a) = \frac{1}{\varphi(a)}$$

Donc $P(x)$ est le polynome que fournit l'identité d'Euler relative aux polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$ que nous avons supposés au début premiers entre eux :

$$P(x) \varphi(x) + Q(x) f(x) = 1,$$

P étant de degré inférieur à $f(x)$ et Q de degré inférieur à φ .

On sait trouver par une suite d'opérations rationnelles le polynome $P(x)$, et cette identité fournit bien la substitution

$$P(a) = \frac{1}{\varphi(a)},$$

puisque $f(a) = 0$.

On a donc la formule d'addition

$$U_{n+n'} = u^n v^{n'} \frac{f(u) P(v) - f(v) P(u)}{u - v}.$$

Quand le second nombre de cette formule est effectué, on met en indices les exposants des u et des v , puis seulement alors on remplace partout v par u .

4. *Exemple de suite récurrente.* — On part des nombres 1 et 3 en formant un nouveau terme par l'addition des deux derniers termes formés. On veut étu-

dier les propriétés d'addition de la suite ainsi formée :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad u_2 = 4, \quad \dots$$

L'échelle de récurrence est ici $x^2 - x - 1$, puisqu'on a

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

Donc

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

Déterminons $\varphi(x)$ par la condition que

$$\frac{\varphi(x)}{x^2 - x - 1} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \dots$$

On trouve facilement que

$$\varphi(x) = x + 2.$$

On cherche donc l'identité d'Euler relative à $x + 2$ et $x^2 - x - 1$. On a par la division

$$x^2 - x - 1 = (x + 2)(x - 3) + 5,$$

d'où l'identité

$$\frac{x^2 - x - 1}{5} + \frac{3 - x}{5}(x + 2) = 1,$$

d'où

$$P(x) = \frac{3 - x}{5},$$

et l'on a, pour l'addition,

$$u_{n+n'} = u^n v^{n'} \frac{(u^2 - u - 1)(3 - v) - (v^2 - v - 1)(3 - u)}{5(u - v)},$$

c'est-à-dire

$$u_{n+n'} = u^n v^{n'} \frac{3(u + v) - uv - 4}{5}.$$

Soit par exemple $n = 2$, $n' = 5$; on aura

$$\begin{aligned} u_{2+5} = u_7 &= \frac{(3u_3u_5 + u_2u_6) - u_3u_6 - 4u_2u_5}{5} \\ &= \frac{3(7 \times 18 + 4 \times 29) - 7 \times 29 - 4 \times 4 \times 18}{5} = 47. \end{aligned}$$

Pour cette suite la formule de duplication serait

$$u_{2n} = \frac{6u_n u_{n+1} - u_{n+1}^2 - 4u_n^2}{5}.$$

Les formules d'addition ainsi déterminées peuvent servir à étudier la décomposition en facteurs des termes de la suite, à calculer des termes lointains de la suite sans passer par les termes intermédiaires (1) (cf. sur $\frac{1}{f(x)}$ l'article de juillet 1907).

On remarquera qu'étant donnés les $p - 1$ premiers termes d'une suite d'ordre p dont on connaît l'échelle de récurrence $f(x)$, on sait trouver $\varphi(x)$ et résoudre par l'intermédiaire de $P(x)$ le problème de l'addition.