

ÉMILE TURRIÈRE

Un cas particulier d'attraction d'un corps sur un point éloigné

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10 (1910), p. 506-509

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__506_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R5a]

UN CAS PARTICULIER D'ATTRACTION D'UN CORPS
SUR UN POINT ÉLOIGNÉ;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE,
Professeur au Lycée d'Alençon.

Soit

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

l'équation, par rapport à ses axes de symétrie $Gxyz$, de l'ellipsoïde central d'inertie d'un corps de forme quelconque et de masse M ; un point de coordonnées x, y, z et situé à une grande distance r du centre de gravité G , étant attiré par chaque point du corps suivant la loi de Newton, la résultante de ces attractions sur le point est la force qui dérive du potentiel

$$V = \frac{M}{r} + \frac{1}{2r^3} [(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2].$$

Il résulte de cette formule connue que le potentiel se réduit au potentiel newtonien $\frac{M}{r}$, lorsque le point attiré est sur une génératrice du cône équilatère du second ordre

$$(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2 = 0.$$

Ce cône ne se décompose en deux plans réels que si l'on a entre les moments principaux la relation

$$C + A - 2B = 0,$$

désignant le moment moyen. *Cette relation caractérise les ellipsoïdes à plans cycliques orthogonaux*; les plans cycliques centraux ont pour équations

$$x \pm z = 0;$$

ce sont, par conséquent, les plans bissecteurs des plans principaux qui se croisent suivant l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie.

Qu'il existe des ellipsoïdes d'inertie satisfaisant à la condition géométrique d'avoir leurs plans cycliques réels orthogonaux, cela est presque évident : en introduisant une représentation géométrique analogue à celle qui se trouve dans la *Mécanique* de Collignon (t. III, p. 465), l'existence de tels ellipsoïdes d'inertie est liée à celle de *triangles dont un côté est la moyenne arithmétique des deux autres côtés*, c'est-à-dire de *triangles tels que la droite qui joint le centre du cercle inscrit au centre de gravité est parallèle au côté moyen*. Des triangles de cette nature existent réellement et ont des propriétés faciles à découvrir ; on peut obtenir ces triangles, d'une façon continue, en joignant, entre eux et à un point quelconque de la courbe, les foyers d'une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$.

Revenons à la question de Mécanique, en supposant que l'ellipsoïde d'inertie du corps attirant est à plans cycliques orthogonaux et en remarquant que c'est précisément en les deux plans cycliques centraux que se décompose le cône équilatère. Si le point matériel attiré est assujéti, par une liaison bilatérale et sans frottement, à rester dans l'un quelconque de ces deux plans, et sur une droite passant par G, le potentiel se réduit au potentiel newtonien ; le point est donc soumis, en outre d'une force normale qui est détruite par la réaction de cette droite, à l'attraction qu'exercerait la masse totale M concentrée en G.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant : *Étant donné un corps dont l'ellipsoïde d'inertie a ses plans cycliques centraux orthogonaux, on assujettit un point matériel éloigné à rester sur une droite passant par G et située dans l'un quelconque de ces deux plans, ce point étant uniquement soumis aux forces attractives qui émanent des divers points du corps; dans ces conditions, ce point matériel décrira la droite comme s'il était libre et attiré par le point G.*

Voici une application numérique, dont j'emprunte une partie des calculs au beau problème de Mécanique rationnelle qui fit l'objet d'une composition pour le concours de 1890 de l'Agrégation des Sciences mathématiques.

Le corps attirant est un tétraèdre homogène OABC trirectangle en O et dont les arêtes ont respectivement pour longueurs

$$OA = \sqrt{2}, \quad OB = 1, \quad OC = \sqrt{3};$$

la masse étant prise égale à 80, afin de simplifier les coefficients, l'équation de l'ellipsoïde central d'inertie du tétraèdre est

$$12x^2 + 15y^2 + 9z^2 + 2\sqrt{2}xy + 2\sqrt{3}yz + 2\sqrt{6}zx = 1,$$

par rapport à des axes $G(x, y, z)$ parallèles aux arêtes OA, OB, OC; l'équation en S est

$$S^3 - 36S^2 + 412S - 1488 = 0,$$

et elle admet pour racines

$$A = 2(6 - \sqrt{5}), \quad B = 12, \quad C = 2(6 + \sqrt{5}).$$

On a donc $A + C - 2B = 0$, et les plans cycliques réels centraux sont orthogonaux; ces plans ont pour

équations

$$\begin{aligned} y + \sqrt{3}z &= 0, \\ 2\sqrt{2}x + 3y - \sqrt{3}z &= 0. \end{aligned}$$

Pour terminer, j'ajouterai que j'ai rencontré les ellipsoïdes à plans cycliques orthogonaux dans deux questions de Géométrie réglée relatives au complexe tétraédral et au complexe de M. G. Humbert. Ces mêmes ellipsoïdes se présentent en Optique, au titre d'ellipsoïdes des indices pour lesquels les axes de réfraction conique intérieure sont orthogonaux ; ces axes sont alors les bissectrices des axes extrêmes. Il existe des corps qui sont positifs pour certaines radiations, négatifs pour d'autres ; en adoptant la formule de dispersion de Cauchy, on calcule facilement une longueur d'onde pour laquelle les axes de réfraction conique intérieure sont orthogonaux. Ces considérations ont été développées, par M. Ulysse Lala, dans une Note, *Importance physique des ellipsoïdes à plans cycliques orthogonaux*, présentée à la session d'août 1910 (Toulouse) de l'Association française pour l'avancement des Sciences.