

V. JAMET

Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 501-506

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__501_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[H9f]

**SUR L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DES SURFACES RÉGLÉES;**

PAR M. V. JAMET.

M. Bricard (¹), citant un travail du regretté professeur Raffy au sujet d'une certaine catégorie de surfaces, fait allusion à l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées. Parmi les jeunes gens qui lisent cette publication, il en est peut-être qui trouveront quelque intérêt à savoir comment on peut établir cette équation, et comment on peut l'intégrer.

1° Soient

$$x = az + \alpha,$$

$$y = bz + \beta$$

les équations d'une droite, mobile sur la surface, a , b , α , β , désignant des fonctions d'un même paramètre u .

(¹) *Nouvelles Annales*, juillet 1910.

Si l'on désigne les dérivées de ces fonctions par α' , β' , α' , β' et si l'on différentie la première d'entre elles par rapport à x , puis par rapport à y ; enfin si l'on élimine $\alpha'z + \alpha'$ entre les deux équations obtenues, on trouve

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{1 - \alpha \frac{\partial z}{\partial x}}{-\alpha \frac{\partial z}{\partial y}}.$$

En traitant de la même manière la deuxième de nos équations, on trouve

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1 - b \frac{\partial z}{\partial y}}{-b \frac{\partial z}{\partial x}}.$$

De ces deux dernières équations résultent celles-ci :

$$(a) \quad a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

et

$$(b) \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{b}{a}.$$

Différentions encore l'équation (a) par rapport à x et à y ; éliminons $\alpha' \frac{\partial z}{\partial x} + b' \frac{\partial z}{\partial y}$ entre les deux équations obtenues, et tenons compte de l'équation (b); nous trouvons

$$\frac{a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{a \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} = -\frac{b}{a},$$

ou bien

$$(c) \quad a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Traisons cette dernière équation (c) de la même manière. Nous en déduisons

$$(d) \quad a^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3a^2 b \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3ab^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + b^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

Enfin l'élimination de $\frac{b}{a}$ entre les équations (c), (d) nous fait connaître l'équation cherchée sous la forme

$$(A) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} & 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} & 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} & 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} & 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \end{vmatrix} = 0.$$

2° Proposons-nous maintenant d'intégrer cette équation, comme si nous ne savions rien sur sa provenance. Si elle est vérifiée, il y a une solution commune aux deux équations suivantes

$$(e) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$(f) \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\lambda \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3\lambda^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \lambda^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0,$$

où l'inconnue est désignée par λ . En différentiant la première, par rapport à x et par rapport à y , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2\lambda \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \lambda^2 \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2\lambda \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^3 z}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre ces deux dernières

équations, après avoir multiplié tous les termes de la deuxième par λ , et en tenant compte de l'équation (f), on trouve encore

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) = 0.$$

De là deux hypothèses à examiner, suivant que l'un ou l'autre des deux facteurs ci-dessus est nul.

Si l'on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

l'équation (e) admet une racine double, et l'on en conclut

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

et l'intégrale qui s'ensuit est l'équation d'une surface développable.

Si, au contraire,

$$(g) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0,$$

l'intégration de cette équation linéaire conduit au résultat suivant

$$y = \lambda x + f(\lambda),$$

f désignant une fonction arbitraire.

Soit encore

$$(h) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial z}{\partial y} = \mu;$$

on trouvera, par différentiation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= \frac{\partial \mu}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial y}, \end{aligned}$$

(505)

puis, en vertu des équations (e) et (g),

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (g) montre que le déterminant fonctionnel de λ et de μ doit être nul. On en conclut

$$(k) \quad \mu = \varphi(\lambda),$$

φ désignant encore une fonction arbitraire.

Soit enfin

$$(l) \quad z = x \varphi(\lambda) + v$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \varphi(\lambda) + x \varphi'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x \varphi'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

On en déduit, en tenant compte des équations (g), (h), (k),

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y},$$

puis, en comparant cette dernière équation avec (g),

$$v = \psi(\lambda),$$

ψ désignant une fonction arbitraire. Donc l'équation (g) devient

$$z = x \varphi(\lambda) + \psi(\lambda),$$

et l'intégrale cherchée résultera de l'élimination de λ entre cette dernière équation et l'équation

$$y = \lambda x + f(\lambda),$$

trouvée antérieurement. Donc enfin l'équation aux dé-

(506)

rivées partielles (A) ne convient qu'aux surfaces réglées.