

Certificat d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 463-470

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__463_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. COURS. — *Méthodes d'approximation dans les intégrales définies. Exposer les méthodes de Côtes, de Gauss.*

II. PROBLÈME. — *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$2y^3 \frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2 y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 9x^2 yz + 12x^2 = 0:$$

1° *Trouver son intégrale générale;*

2° *Déterminer la surface S qui vérifie cette équation et qui passe par la courbe dont les équations sont*

$$x = y, \quad yz + 3y = 1.$$

Déterminer les lignes asymptotiques de la surface ainsi définie.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^4 \frac{d^4 y}{dx^4} + 7x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 7x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6x \frac{dy}{dx} - 2y = X,$$

$$X = -16x - \frac{54}{x} + x^2 [297 + 324 \log x + 81 (\log x)^2].$$

(Novembre 1909.)

Dijon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère la surface*

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3,$$

$$y = 3v + 3u^2v - v^3,$$

$$z = 3u^2 - 3v^2:$$

1° Trouver ses lignes de courbure. Démontrer qu'elles sont planes. Trouver leurs plans;

2° Trouver ses lignes asymptotiques. Sous quel angle se coupent-elles? Quelle particularité présente la surface?

3° Comment a-t-on, sans calcul, une carte géographique de la surface (conservant les angles)?

4° Démontrer que $\theta = x$, $\theta = y$, $\theta = z$ sont trois solutions de l'équation

$$(1 + u^2 + v^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - 2v \frac{\partial \theta}{\partial u} - 2u \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Déduire de là un nouveau moyen d'avoir les lignes de courbure.

II. Développer $\frac{x^2}{4}$ en série trigonométrique entre $-\pi$ et π . Que devient la série obtenue pour $x = 0$ et $x = \pi$?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit

$$z = xL(xy)$$

l'équation d'une surface (en coordonnées rectangulaires).

Évaluer, à 1 mm³ près, le volume compris entre cette surface, le plan Oxy , le plan Oxz , le plan $z = 3x$, le plan $x = 1$ cm.

(Juillet 1909.)

COMPOSITION. — Considérant la surface S définie par

$$ae^x + be^y + ce^z = 1 :$$

1° Déterminer la courbe de contact C_0 de S avec le cylindre circonscrit dont les génératrices ont α, β, γ pour paramètre;

2° Démontrer que les courbes de contact C de S avec les cylindres dont les génératrices ont pour paramètres directeurs

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha u}, \quad \frac{\beta}{1 - \beta u}, \quad \frac{\gamma}{1 - \gamma u},$$

u étant arbitraire, sont superposables à la courbe C_0 ;

3° Former l'équation du cône directeur des génératrices de tous ces cylindres;

4° Montrer que, en chaque point P de S, se rencontrent deux courbes C, et calculer les coordonnées de P en fonction des valeurs du paramètre u qui correspondent à ces deux courbes;

5° Vérifier que ces deux courbes C sont conjuguées.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx} \cos 2x + 2y \tan x + y^2 = 0;$$

2° Intégrer l'équation

$$a \frac{dy}{dx} \cos 2x = 3y^2 - 8y - 3$$

et vérifier que le rapport anharmonique de quatre solutions particulières est constant.

(Novembre 1909.)

Lille.

I. QUESTION DE COURS. — Démontrer que toute courbe algébrique de genre 1 peut être, par une transformation birationnelle, transformée en une courbe du troisième ordre. Plus généralement, démontrer que toute courbe algébrique de genre p peut être transformée, de la même manière, en une courbe d'ordre $p + 2$.

II. PROBLÈME. — Pour que les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

forment un système isotherme, il faut et il suffit que la fonction f satisfasse à une certaine équation aux dérivées partielles du deuxième ordre. Former cette équation de condition et, en la supposant vérifiée, en déduire un facteur d'intégrabilité de l'équation (1).

(Novembre 1909.)

Marseille.

COMPOSITION ÉCRITE. — On considère une surface Σ enveloppe d'une sphère variable S qui se déplace de sorte que son centre C décrive une circonférence donnée O et que son rayon soit constamment égal à la distance CD du point C à un diamètre fixe $A'A$:

1° Démontrer que ce mode de génération de la surface Σ fait connaître immédiatement sur celle-ci une première série de lignes de courbure, et l'un des rayons de courbure principaux en chacun de ses points;

2° Former l'équation générale d'un plan assujetti à passer sans cesse par la tangente à la circonférence O et à toucher une surface développable D dont chaque génératrice soit normale à la surface Σ ;

3° En déduire les équations qui font connaître une ligne de courbure de la deuxième série; démontrer que chacune de ces lignes est dans un plan passant par AA' ;

4° Calculer l'angle sous lequel ce plan coupe la surface Σ et expliquer pourquoi cet angle est le même en tous les points d'une même ligne de courbure de la deuxième série.

SOLUTION.

La caractéristique du plan a pour équations

$$\begin{aligned} \cos \theta (x - a \cos \theta) + \sin \theta (y - a \sin \theta) + \lambda z &= 0, \\ -\sin \theta (x - a \cos \theta) + \cos \theta (y - a \sin \theta) + \lambda' z &= 0 \end{aligned}$$

et pour paramètres directeurs

$$\lambda' \sin \theta - \lambda \cos \theta, \quad -\lambda \sin \theta - \lambda' \cos \theta, \quad +1.$$

Cette caractéristique doit être sur le cône-normalie de sommet C dont l'équation est

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta [(x - a \cos \theta)^2 + (y - a \sin \theta)^2 + z^2] \\ = [\sin \theta (x - a \cos \theta) - \cos \theta (y - a \sin \theta)]^2, \end{aligned}$$

d'où l'équation différentielle

$$\cos^2 \theta \left[\frac{d\lambda^2}{d\theta^2} + \lambda^2 + 1 \right] = \frac{d\lambda^2}{d\theta^2}.$$

Elle a pour intégrale générale

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(A \sin \theta - \frac{1}{A \sin \theta} \right).$$

En joignant aux équations de la caractéristique la valeur de λ et l'équation

$$x \sin \theta + y \cos \theta = a \sin \theta \cos \theta,$$

on trouve

$$y = \frac{2a \sin^3 \theta}{A^2 \sin^2 \theta + 1}, \quad z = A y.$$

Enfin on trouve pour l'angle demandé $\frac{A}{\sqrt{A^2 + 1}}$; c'est l'azimut du plan de la ligne de courbure par rapport au plan zOx .

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Calculer l'intégrale

$$\int \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z-1}}$$

le long d'un cercle de rayon inférieur à 2 et dont le centre est au point $z_0 = -1$;

2° Calculer la limite de la même intégrale le long d'un cercle de rayon infiniment petit entourant le point $z_1 = +1$;

3° Calculer la limite de la même intégrale le long d'un cercle de rayon infiniment grand ayant pour centre l'origine;

4° Dédire des calculs précédents la valeur de l'intégrale réelle

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}.$$

Vérifier directement le résultat et calculer la valeur numérique de cette intégrale à 0,001 près.

SOLUTION.

$$1^{\circ} \pi\sqrt{2}; 2^{\circ} \text{ et } 3^{\circ} \text{ zéro; } 4^{\circ} I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 2,22.$$

(Novembre 1909.)

Nancy.ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne l'équation*

$$u^3 - 3u + 2z^2 = 0,$$

qui définit u comme fonction algébrique de z :

1° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de la fonction u? Quelle est la nature du point $z = \infty$ relativement à cette fonction? Trouver la forme des développements qui représentent ses branches envisagées dans le domaine de chacun de ces points et en calculer les premiers coefficients;*

2° *Construire la surface de Riemann corrélative de l'équation proposée;*

3° *Former l'équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre, à laquelle satisfont les branches de la fonction u;*

4° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de cette équation différentielle? Écrire l'équation déterminante relative à chacun d'eux et distinguer ceux qui sont vraiment singuliers, et non à apparence singulière. Examiner le cas du point $z = \infty$.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit*

$$v = \frac{u^3 + (z^2 + 4)(u^2 + 4u + 16)}{(z - 2)^2}$$

une fonction rationnelle de u et de z, u désignant la fonc-

tion algébrique de z définie par l'équation

$$u^2 = z^4 - 16.$$

Déterminer ses pôles et ses zéros, à distance finie ou infinie, ainsi que ses développements en série dans le domaine de ces points. On calculera les résidus et les premiers coefficients de ces développements.

(Juin 1909.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Soit l'équation différentielle linéaire et homogène

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + p \frac{du}{dz} + qu = 0,$$

p et q étant des fonctions de z . On suppose que ces deux fonctions sont développables en séries entières en $z - z_0$, absolument convergentes pour $|z - z_0| \leq R$.

Démontrer qu'en désignant par a_0 et a_1 deux nombres arbitraires, il existe une série de la forme

$$a_0 = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots$$

dans laquelle les coefficients $a_2, a_3, \dots$ sont déterminés, convergente pour $|z - z_0| < R$, et qui satisfait identiquement à l'équation différentielle.

II. On considère l'équation

$$(u - 1)^2(u - 2)^3 - z^2(u - z)^2 = 0$$

qui définit u comme fonction algébrique de z :

- 1° Construire la courbe représentée par cette équation ;
- 2° Quels sont les points singuliers de la fonction algébrique ?
- 3° Trouver la forme des développements qui représentent ses branches envisagées dans le domaine de chacun de ces points.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Sachant que les racines de l'équa-

(470)

tion

$$u^3 - 3u + 6z = 0$$

satisfait à l'équation différentielle

$$(9z^2 - 1) \frac{d^2 u}{dz^2} + 9z \frac{du}{dz} - u = 0,$$

employer cette dernière à calculer, dans le domaine de l'origine, le développement en série de la racine qui, pour $z = 0$, a la valeur initiale zéro. (Octobre 1909.)