NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. HALPHEN

Sur les accélérations successives

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10 (1910), p. 433-436

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__433_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[R1a]

SUR LES ACCÉLÉRATIONS SUCCESSIVES;

PAR M. CH. HALPHEN.

On doit à M. Darboux un théorème aussi élégant que simple, qu'on peut formuler ainsi :

Un point étant en mouvement dans un champ de forces, si sa vitesse dérive d'un potentiel, il en est de même de l'accélération (c'est-à-dire qu'il existe une fonction de forces).

Soient en effet, par rapport à trois axes rectangulaires fixes, x, y, z, les coordonnées du point; $V(x, y, z)$ étant une fonction de point, on a par hypothèse

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

On en déduit immédiatement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\Delta V\right),$$

et pareillement

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\Delta V\right), \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\Delta V\right),$$

où ΔV désigne le paramètre différentiel du premier ordre

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

L'accélération dérive donc du potentiel $\frac{1}{2}\Delta V$.

Considérons maintenant l'accélération du second

ordre, dont les composantes sont $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^3z}{dt^3}$. On a comme ci-dessus

$$(1)\quad \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta V + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta V + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\Delta V\right),$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \ldots, \qquad \frac{d^3z}{dt^3} = \ldots.$$

Il paraît assez naturel de se demander si elle ne dérive pas du potentiel $\frac{1}{4}\Delta\Delta V$, c'est-à-dire si elle ne suit pas vis-à-vis de l'accélération la même loi que celle-ci vis-à-vis de la vitesse. Or, on a

$$\Delta\Delta V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta V\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\Delta V\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\Delta V\right)^2,$$

de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}\Delta\Delta V\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta V\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta V + \frac{\partial}{\partial y}\Delta V\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta V + \frac{\partial}{\partial z}\Delta V\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\Delta V\right).$$

Comparons à l'expression (1) : les dérivées premières y sont de celles de V, au lieu d'être, comme ici, celles de ΔV. Il y a donc identité, si

$$(2)\qquad V = \Delta V.$$

Donc, sous la condition (2), l'accélération du second ordre dérive aussi d'un potentiel, $\frac{1}{4}\Delta\Delta V$; mais en raison même de cette condition, ce potentiel n'est autre que $\frac{V}{4}$, le potentiel dont dérive l'accélération étant alors $\frac{V}{2}$. Il n'y a aucune difficulté à voir que l'accélération du troisième ordre dérive du potentiel $\frac{V}{8}$; l'accélération d'ordre n, du potentiel $\frac{V}{2^n}$.

Voilà donc, sous la seule condition (2), un mouvement dont toutes les accélérations successives dérivent de potentiels, décroissant en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Quel est ce mouvement?

La condition (2) est une équation aux dérivées partielles du premier ordre que nous allons réduire immédiatement à une forme beaucoup plus simple. Puisque $V = \Delta V$, les composantes de l'accélération

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial z}$$

sont proportionnelles à celles de la vitesse. L'accélération est alors purement tangentielle, donc le mouvement est *rectiligne*.

Une élégante démonstration du même résultat m'a été indiquée par M. H. Vergne. Si une fonction $V(x, y, z)$ satisfait à l'équation (2), la famille de surfaces $V(x, y, z) = \text{const.}$ est composée de surfaces parallèles. En effet, tout le long d'une surface (S) $V = \text{const.}$, la dérivée normale $\frac{dV}{dn}$, qui est égale à $\sqrt{\Delta V}$, est constante; et par suite, à la distance dn prise sur les normales à la surface (S), à partir de cette surface, on retrouve pour V une valeur constante. Or, d'après les équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

la trajectoire du point mobile est trajectoire orthogonale de la famille de surfaces $V = \text{const.}$; c'est donc une ligne droite, puisque ces surfaces sont parallèles.

Prenons alors la trajectoire pour axe des x; y et z n'interviennent plus, et (2) se réduit à

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = V \qquad \text{ou} \qquad \pm\frac{dV}{\sqrt{V}} = dx, .$$

d'où, par intégration,

$$V = \frac{1}{4}(x+c)^2.$$

Ceci étant, la vitesse a pour expression

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(x+c),$$

d'où, en intégrant,

$$x = ke^{\frac{t}{2}} - c.$$

Telle est la loi du mouvement rectiligne en question.

Le mouvement que nous avons trouvé n'est pas le seul où, la vitesse dérivant d'un potentiel, il en est de même des accélérations d'ordre supérieur : il est aisé de voir, par exemple, que dans tout mouvement rectiligne, cette condition est remplie. Mais c'est le seul mouvement où le potentiel de chaque accélération se déduit du précédent d'après la même loi que suit le potentiel de l'accélération vis-à-vis du potentiel de la vitesse.