

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 424-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__424_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2128.

(1909, p. 192.)

D'un point P on mène les trois normales à une parabole : soient α , β , γ les centres de courbure situés sur ces trois normales.

De chacun des points α , β , γ on peut mener une autre normale à la parabole. Démontrer que ces trois droites concourent.

(Georges CUNY.)

SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

La condition nécessaire et suffisante pour que trois normales à la parabole soient concourantes est que la somme de leurs coefficients angulaires

$$m_1 + m_2 + m_3$$

soit nulle.

Si μ_1 , μ_2 , μ_3 sont les coefficients angulaires des normales simples issues de α , β , γ , on a

$$2m_1 + \mu_1 = 0, \quad 2m_2 + \mu_2 = 0, \quad 2m_3 + \mu_3 = 0;$$

d'où

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Autres solutions par MM. BARISIEN et GIRAUDON.

2130.

(1909, p. 218.)

On donne un carré ABCD et un cercle concentrique à ce carré. Pour chaque point M de ce cercle, on a

$$\overline{MA}^{2n} + \overline{MB}^{2n} + \overline{MC}^{2n} + \overline{MD}^{2n} = \text{const.},$$

n étant l'un des nombres 1, 2 ou 3 ⁽¹⁾.

(E.-N. BARISIEN.)

(¹) La condition que n soit égal à 1, 2 ou 3 avait été oubliée

SOLUTION,

Par M. L. GIRAUDON.

Rapportons la figure aux deux diagonales AB et BC du carré; désignons par $2a$ la longueur commune à ces diagonales, par R le rayon du cercle, et posons, pour simplifier,

$$R^2 + a^2 = b^2.$$

Pour chaque point $M(x, p)$ du cercle, on a

$$\overline{MA}^2 = y^2 + (x - a)^2 = b^2 - 2ax,$$

$$\overline{MC}^2 = y^2 + (x + a)^2 = b^2 + 2ax,$$

$$\overline{MB}^2 = x^2 + (y - a)^2 = b^2 - 2ay,$$

$$\overline{MD}^2 = x^2 + (y + a)^2 = b^2 + 2ay.$$

En désignant par S_1, S_2, S_3 la somme des premiers membres des quatre égalités précédentes, celle de leurs carrés et celle de leurs cubes, on trouve

$$S_1 = 4b^2,$$

$$S_2 = 4b^4 + 8a^2R^2,$$

$$S_3 = 4b^6 + 24a^2b^2R^2.$$

C. Q. F. D.

Autres solutions par M^{lle} A.-D. BETTS et M. BOUVAIST.

2434.

(1909, p. 248.)

On projette un point M variable du cercle circonscrit à un triangle ABC sur les côtés BC, CA, AB, en P, Q, R. Le lieu du milieu de chacun des segments QR, RP, PQ, de la droite PQR est une ellipse.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION,

Par M. THIÉ.

Considérons par exemple le milieu I de QR. Si l'on prend pour axes de coordonnées les droites AB et AC, il est aisé de

dans l'énoncé. Elle a été rétablie dans un erratum inséré page 288 du Tome précédent.

voir, même sans calculs, que les coordonnées du point I sont des fonctions linéaires de celles du point M. On passe donc du point M au point I par une *affinité*, homographie particulière qui conserve la droite de l'infini, les rapport de division, les centres des courbes, etc.

Le lieu demandé est la transformée du cercle donné dans cette affinité : c'est une ellipse passant en A, dont le centre correspond à celui du cercle par la transformation considérée ; ce centre est par suite le milieu du segment limité par les milieux de AB et AC.

Autres solutions par MM. BOUVAIST et GIRAUDON.

2132.

(1909, p. 288.)

D'un point P quelconque du plan d'une ellipse de centre O, on abaisse les quatre normales dont les pieds sont M₁, M₂, M₃, M₄. Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont les angles que les normales font avec le grand axe, et $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ les angles que les droites OM₁, OM₂, OM₃, OM₄ font avec le même axe, on a

$$\begin{aligned} & (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \tan \alpha_3 + \tan \alpha_4) \\ & \quad \times (\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 + \cot \alpha_3 + \cot \alpha_4) \\ & = (\tan \beta_1 + \tan \beta_2 + \tan \beta_3 + \tan \beta_4) \\ & \quad \times (\cot \beta_1 + \cot \beta_2 + \cot \beta_3 + \cot \beta_4) = 4. \end{aligned}$$

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

L'équation aux coefficients angulaires des normales à l'ellipse O, issues de P(α, β), est

$$\begin{aligned} & b^2 \alpha^2 m^4 - 2 b^2 \alpha \beta m^3 \\ & + m^2 (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^4) - 2 a^2 \alpha \beta m + a^2 \beta^2 = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum \tan \alpha_1 \sum \frac{1}{\tan \alpha_1} = 4.$$

L'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points d'intersection de l'ellipse O et de l'hyper-

bole d'Apollonius de P,

$$c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0,$$

est

$$a^6 \alpha^2 m^4 - 2 a^4 b^2 \alpha \beta m^3 + m^2 (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^2) a^2 b^2 - 2 a^2 b^4 \alpha \beta m + b^6 \beta^2 = 0;$$

d'où

$$\sum \tan \beta_1 \sum \frac{1}{\tan \beta_1} = 4.$$

C. Q. F. D.

Autre solution par M^{lle} A.-D. BETTS.

2133.

(1909, p. 288.)

Deux cercles C et C' sont bitangents à une ellipse E, le premier en A et B, le second en A' et B'. Montrer que les tangentes issues de A au cercle C' et les tangentes issues de A' au cercle C ont même longueur.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION,

Par M. THIÉ.

Il faut supposer que les deux cercles considérés dans l'énoncé ont leurs centres sur le même axe de l'ellipse, sans quoi le théorème ne serait pas vrai.

Je ferai la démonstration en remplaçant l'ellipse par une hyperbole. Le théorème, tel qu'il est énoncé, s'ensuivra, en vertu du principe de continuité.

Soit H l'hyperbole tangente aux cercles C et C', dont nous supposerons les centres sur l'axe non transverse de H. Si l'on fait tourner la figure autour de ce dernier, H engendre un hyperboloïde, C et C' deux sphères inscrites à ce dernier. Le théorème énoncé est alors évident, si l'on remarque que les deux tangentes considérées ont pour longueur commune celle du segment intercepté sur une génératrice quelconque de H par les deux parallèles de contact de cet hyperboloïde avec les deux sphères.

Autres solutions par M^{lle} A.-D. BETTS, MM. BOUVAIST et KLUG.

2134.

(1909. p. 336.)

Soient, dans un triangle ABC , I le centre du cercle inscrit, O celui du cercle circonscrit, I' le symétrique de I par rapport à O . Démontrer les propriétés suivantes :

1° Les perpendiculaires à $I'A$, $I'B$, $I'C$, élevées en A , B , C , rencontrent BC , CA , AB en A' , B' , C' . Ces trois points sont en ligne droite.

2° Si l'on projette I' en A'' , B'' , C'' sur BC , CA , AB , les droites AA'' , BB'' , CC'' concourent en un même point.

Les mêmes propriétés s'appliquent aux centres I_A , I_B , I_C des cercles exinscrits et à leurs symétriques I'_A , I'_B , I'_C par rapport à O .
(E.-N. BARISIEN.)

PREMIÈRE SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

Si l'on considère les coniques circonscrites à un triangle ABC et telles que les normales à ces coniques en A , B , C soient concourantes, ou les coniques inscrites dans le même triangle ABC et telles que les normales aux points de contact avec les côtés soient concourantes, le lieu du point de concours de ces normales est, dans les deux cas, une même cubique. Le problème, d'ailleurs classique, a été traité analytiquement par Kœhler (*Exercices de Géométrie analytique*, 1^{re} Partie), par M. Papelier (*Coordonnées tangentielles*, 1^{re} Partie) et géométriquement par M. Vacquant dans la *Revue de Mathématiques spéciales*.

Nous n'y reviendrons pas et nous nous bornerons à rappeler que la cubique en question jouit des propriétés suivantes :

1° Elle est circonscrite au triangle ABC , passe par le centre O du cercle circonscrit (qui d'ailleurs est son centre), par l'orthocentre H , par les centres I , I_A , I_B , I_C des cercles inscrits et exinscrits.

2° Elle se transforme en elle-même par inversion triangulaire par rapport au triangle ABC et enfin elle peut être considérée comme le lieu des points de contact des tangentes issues de O aux hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC .

D'après cela on voit que la cubique envisagée passant par I, I_A, I_B, I_C et ayant pour centre le point O , passe par I', I'_A, I'_B, I'_C , ce qui démontre les propriétés faisant l'objet de la question 2134.

DEUXIÈME SOLUTION,

Par M. F. FARJON.

On peut considérer I comme l'orthocentre du triangle LMN formé par les bissectrices extérieures du triangle ABC ; I' est le centre du cercle circonscrit à LMN .

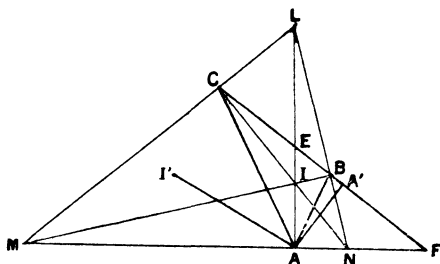
Soient E et F les points d'intersection du côté BC avec les bissectrices AI et AN . On a

$$BE = \frac{ac}{b+c}, \quad EC = \frac{ab}{b+c}, \quad FB = \frac{ac}{b-c},$$

$$FE = FB + BE = \frac{2abc}{b^2 - c^2}.$$

On trouve sans difficulté

$$\tan \angle FAA' = \frac{\sin(N-M)}{-\cos(N+M)},$$



et dans le triangle rectangle FAE dont l'angle en $F = N - M$

$$\frac{A'E}{A'F} = \frac{\cos(N-M)}{-\cos(N+M)},$$

d'où

$$A'E = \frac{abc}{b^2 - c^2} \frac{\cos(N-M)}{\sin M \sin N},$$

$$A'B = A'E - BE = \frac{ac}{b^2 - c^2} \frac{c \sin M \sin N - b \cos M \cos N}{\sin M \sin N},$$

$$A'C = EC + A'E = \frac{ab}{b^2 - c^2} \frac{b \sin M \sin N - c \cos M \cos N}{\sin M \sin N};$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{A'B}{A'C} &= \frac{c}{b} \frac{c \sin M \sin N - b \cos M \cos N}{b \sin M \sin N - c \cos M \cos N} \\ &= \frac{c}{b} \frac{c \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - b \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{b \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - c \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{\tan^2 \frac{C}{2}}{\tan^2 \frac{B}{2}}. \end{aligned}$$

En opérant de même pour les points B' et C', on reconnaît que les trois points A', B', C' sont sur une même transversale du triangle ABC.

La seconde partie est évidente, puisque les segments que déterminent sur les côtés de ABC les points A'', B'', C'' sont égaux à ceux que déterminent sur ces mêmes côtés les rayons aux points de contact du cercle I et placés en ordre inverse.

Ces propriétés s'étendent aux cas des cercles exinscrits. Le point I_A, par exemple, est le centre du cercle circonscrit au triangle MIN dont L est l'orthocentre, et la suite des calculs est la même.

2135.

(1909, p. 383.)

On considère deux ellipses égales E et E₁, l'une de centre O et ayant un foyer en F, la seconde ayant son centre en F et le foyer en O. Soient M un point quelconque de E, P la projection de F sur la normale en M. La droite OP rencontre l'ellipse E₁ en deux points H et H'. Pour l'un de ces points, H par exemple : 1° les distances de M et H à OF sont égales; 2° la longueur PH est constante et égale au demi-grand axe.

SOLUTION,

* Par M. R. BOUVAIST.

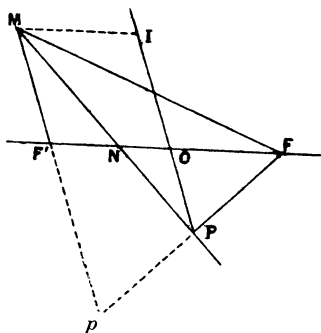
L'énoncé proposé revient au suivant :

Soit une ellipse E de foyers F et F'; si l'on projette en P le foyer F sur la normale en un point quelconque M de E, le diamètre passant par P est parallèle à MF'. La parallèle à FF' menée par M coupe le diamètre passant par P en un point I, tel que IP est égal au demi-grand axe de E.

(431)

On a :

$$1^{\circ} \quad OF = F'O, \quad PF = pP;$$



donc OP est parallèle à MF' ;

$$2^{\circ} \quad \text{IP} = \text{MF}' + \frac{1}{2} \text{F}' p = \text{MF}' + \frac{1}{2} (\text{MF} - \text{MF}'),$$

$$PI = \frac{1}{2} (MF + MF').$$

C. Q. F. D.

Autres solutions par M^{lle} Rita MURÈGE, MM. KLUG, PÉLISSIER et LEZ.

2136.

(1909, p. 384.)

On donne cinq forces, dirigées sur cinq droites fixes, et un point P. Les forces varient de façon que leur moment résultant par rapport à P soit nul : lieu de la résultante générale passant par P. (M. TÊTU.)

SOLUTION.

Par M. PARROD.

Soient $\lambda_i X_i$, $\lambda_i Y_i$, $\lambda_i Z_i$ et $\lambda_i L_i$, $\lambda_i M_i$, $\lambda_i N_i$ les projections et les moments d'un vecteur par rapport à trois axes rectangulaires, l'origine étant P.

Les variables sont les cinq coefficients de proportionnalité

$$\lambda_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

On a

$$\begin{aligned} X &= \Sigma \lambda_i X_i, & Y &= \Sigma \lambda_i Y_i, & Z &= \Sigma \lambda_i Z_i, \\ L &= \Sigma \lambda_i L_i = 0, & M &= \Sigma \lambda_i M_i = 0, & N &= \Sigma \lambda_i N_i = 0. \end{aligned}$$

Eliminons les paramètres λ_i . On obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} X & X_1 & X_2 & \dots & X_5 \\ Y & Y_1 & \dots & \dots & Y_5 \\ Z & Z_1 & \dots & \dots & Z_5 \\ 0 & L_1 & \dots & \dots & L_5 \\ 0 & M_1 & \dots & \dots & M_5 \\ 0 & N_1 & \dots & \dots & N_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Le lieu demande est un plan.

Autre solution par M^{lle} Rita MUREGE.