

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 406-423

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__406_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVES THÉORIQUES. — I. *Exposer sommairement les questions suivantes :*

1° *Définition du vecteur tourbillon (ou rotation moyenne) en un point d'un milieu continu en mouvement.*

Propriété relative à la distribution géométrique de ce vecteur à un instant donné.

La distribution dans le temps et dans l'espace dans tous les cas où il existe une fonction des accélérations : théorèmes d'Helmholtz et de Lagrange.

2° *Vibrations adiabatiques des gaz ; calcul de la vitesse du son dans l'air.*

II. Plusieurs points matériels sont supposés :

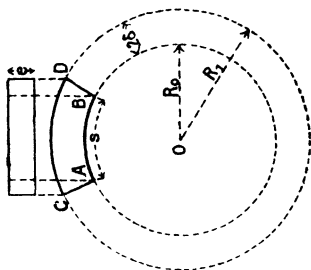
1° Liés entre eux de manière que leur figure demeure toujours semblable à sa forme initiale;

2° Soumis à des forces mutuelles proportionnelles aux masses et à la distance.

Étudier le mouvement de ce système.

ÉPREUVES PRATIQUES. — I. Un cylindre pesant mobile autour d'un axe horizontal O et de rayon R_0 est en équilibre stable (fig. 1).

Fig. 1.



Dans cette situation d'équilibre on rapporte sur sa surface latérale un patin prismatique homogène de masse m admettant comme plan de symétrie le plan vertical passant par l'axe horizontal O .

Les dimensions du patin sont connues et désignées par : ρ , rayon moyen; s , l'arc de base sur le cylindre; 2δ , hauteur radiale de la couronne cylindrique dans laquelle est logé le patin; e , dimension de ce prisme comptée parallèlement aux génératrices du cylindre, c'est-à-dire à l'axe O .

Calculer :

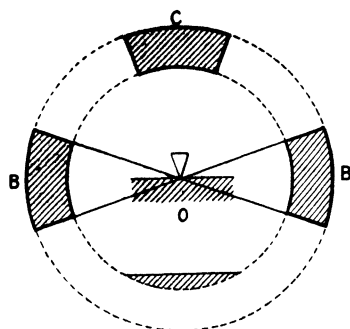
1° Le moment d'inertie mK^2 du patin par rapport à l'axe O du cylindre;

2° La distance ξ du centre de gravité du patin à l'axe O .

II. Une roue cylindrique, lestée de manière à pouvoir osciller sur un couteau d'acier dont l'arête coïncide avec

l'axe du cylindre, est munie de trois patins égaux vissables sur le pourtour plein de la roue; les patins opposés BB sont de niveau dans la position conservée de l'équilibre du cylindre (avec ou sans patins) tandis que le patin C est à

Fig. 2.



angle droit des patins B et par conséquent appuyé sur la génératrice de faite du cylindre lors de sa position d'équilibre (fig. 2).

Les six vis des patins sont doublées par des vis de même terminaison mais réduites en longueur de manière à reproduire les parties des premières vis logées hors de l'écrou du patin lorsque les patins sont réunis à la roue.

Les dimensions de la roue primitive et de ses patins sont, avec les notations précédentes :

$$R_0 = 1^m, 00, \quad \delta = 0^m, 05, \quad s = 0^m, 30, \quad e = 0^m, 06, \quad \rho = 1^m, 05.$$

La roue oscillant sans ses patins mais avec les vis raccourcies en place, on a compté par heure 2616 petites oscillations simples; la roue oscillant avec ses patins, on a compté 2512 oscillations simples :

1° Calculer le moment d'inertie A et le moment maximum MgL du poids de la roue dans son premier état de mouvement;

2° En supposant les patins exactement mesurés, quelle est l'approximation des résultats du calcul.

(Juillet 1909.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Mouvement d'un solide homogène de révolution pesant dont deux points, pris sur son axe symétriquement par rapport à son centre de gravité, sont assujettis à se déplacer sans frottement dans deux plans verticaux rectangulaires fixes.*

Étudier la forme de la projection horizontale, de la trajectoire du centre de gravité.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Tous les points d'un cylindre homogène et de révolution non pesant sont attirés par un plan fixe P proportionnellement à la masse et à la distance. Sous l'action de ces forces, le cylindre qui n'est soumis à aucune liaison prend un mouvement dans lequel on a l'intégrale des forces vives*

$$T - U = h.$$

Calculer explicitement la constante h au moyen des données suivantes :

La hauteur, le rayon et la densité du cylindre sont respectivement $2a$, α , ρ .

A l'instant initial, le cylindre est incliné à 45° sur le plan P et l'une de ses bases est tangente à ce plan en un point F.

Le mouvement initial du cylindre se compose de deux rotations rectangulaires ayant même grandeur ω , la première ayant lieu autour de la tangente en F à la circonférence de la première base et la seconde ayant lieu autour du diamètre perpendiculaire de la seconde base.

On désignera par K l'attraction du plan P sur l'unité de masse placée à l'unité de distance.

(Juin 1909.)

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque rectangulaire homogène, pesante et d'épaisseur négligeable, ABCD, peut tourner librement autour d'un axe horizontal Ox, confondu avec le côté AB. L'axe Ox est invariablement lié à un solide pesant, S, qui peut tourner librement autour d'un axe vertical fixe, Oz₁, rencontrant l'axe Ox au point O, milieu de AB :*

1° Les liaisons étant supposées sans frottement, et les conditions initiales étant quelconques, étudier le mouvement du système. Indiquer, en particulier, si le mouvement de la plaque autour de Ox est oscillatoire ou révolutif.

2° Déterminer les conditions à remplir pour que, pendant tout le mouvement, la plaque fasse un angle constant avec la verticale; calculer cet angle et reconnaître si le mouvement correspondant est stable ou instable.

On pourra lier à la plaque ABCD un système d'axes rectangulaires constitué à l'aide de l'axe de rotation Ox et de la normale Oz ; on définira la position du système à l'aide de l'angle φ dont tourne le solide S autour de Oz_1 , et de l'angle θ que fait le plan de la plaque avec la verticale ascendante Oz_1 .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une barre homogène pesante, de longueur $2d$ et de densité 1, est suspendue par l'un de ses points A à un point fixe O à l'aide d'un fil de longueur l . On néglige la masse du fil et la section droite de la barre :

1° Trouver les équations définissant les petits mouvements dans le voisinage de la position d'équilibre stable, la barre restant dans un plan vertical passant par O.

2° Déterminer explicitement ces petits mouvements pour

$$l = 2a, \quad d = a\sqrt{6},$$

a désignant la distance du point d'attache A au milieu G de la barre.

Le système pourrait-il servir à mesurer le temps, et quelles seraient à ce point de vue ses relations avec le pendule simple de longueur $a = AG$?

3° On suppose que le point A coïncide avec le point G, et l'on demande de déterminer les mouvements ayant lieu dans un plan vertical passant par O, et pour lesquels le fil reste voisin de la verticale.

Existe-t-il dans ce cas des positions d'équilibre stable ?

On pourra désigner par θ l'angle du fil avec la verticale descendante, par φ l'angle de la direction de la barre avec la même verticale, et calculer la force vive du système par le théorème de König.

(Juin 1909.)

Clermont-Ferrand.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une barre homogène pesante, AB, glisse sans frottement dans un plan vertical xOy . Un fil inextensible et de masse négligeable relie le point fixe O au milieu de la barre. Trouver le mouvement de la barre et la tension du fil.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un parabolôide de révolution est engendré par une parabole de paramètre p . A une distance h du sommet on mène un plan perpendiculaire à l'axe; on considère le volume homogène découpé par ce plan dans le parabolôide :*

1° *Évaluer ce volume;*

2° *Rayons de giration de ce volume par rapport à l'axe et par rapport à une perpendiculaire à l'axe menée par le sommet.*

Calcul numérique : $p = 4,5$; $h = 11$.

(Juin 1909.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un solide S peut tourner autour d'un axe vertical Oz. Il est traversé par un canal rectiligne OC infiniment étroit rencontrant l'axe Oz en O et dans lequel se meut un point matériel pesant M. Les liaisons sont sans frottement :*

1° *Trouver le mouvement du système en supposant que S tourne librement autour de Oz.*

2° *Trouver le mouvement du point en supposant qu'on oblige S à tourner uniformément autour de Oz.*

Après avoir trouvé les équations différentielles des deux problèmes et poussé leur intégration aussi loin que possible, on cherchera, dans les deux cas, le sens du mouvement initial de M sur OC en supposant qu'à l'instant initial la vitesse absolue de M soit perpendiculaire à OM; on laissera de côté toute autre discussion.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque homogène de masse m a la forme d'un triangle équilatéral de côté a :*

1° *Calculer le moment d'inertie I de la plaque par rapport à l'un de ses côtés et déterminer l'ellipsoïde central d'inertie.*

2° Deux des sommets étant fixés sur une même verticale Oz , déterminer le mouvement de la plaque en admettant qu'elle est soumise à un couple résistant, dont le moment, parallèle à Oz , a une intensité constante N , et en admettant en outre que chaque élément infiniment petit ds de sa surface est soumis à une force résistante, qui lui est perpendiculaire, et qui est proportionnelle au carré de la vitesse v ; l'intensité de cette force sera représentée par $k^2 v^2 ds$, k étant constant.

L'équation différentielle à laquelle on parvient est, en désignant par ω la vitesse de rotation de la plaque,

$$(1) \quad \frac{d\omega}{dt} = -\lambda(x^2 + \omega^2).$$

On calculera λ et x en fonction des données précédentes, mais on fera usage de la forme réduite (1) pour l'intégration.

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soient $Ox_1y_1z_1$ et $Oxyz$ deux trièdres trirectangles de même sommet O , et p, q, r les projections sur Ox, Oy, Oz de la rotation instantanée dans le mouvement du second trièdre par rapport au premier. Établir les formules qui donnent p, q, r en fonction des angles d'Euler ψ, θ, φ caractérisant la position de $Oxyz$ par rapport à $Ox_1y_1z_1$ et des dérivées ψ', θ', φ' de ces angles par rapport au temps.

PROBLÈME. — Une plaque circulaire homogène infiniment mince est assujettie aux liaisons suivantes : 1° son centre O est fixe; 2° l'un de ses diamètres Ox est assujetti à rester perpendiculaire à un axe fixe Oz . Aucune force donnée n'agit sur la plaque et il n'y a pas de frottement.

I. Déterminer le mouvement de la plaque. (Intégrer autant que possible; inutile de discuter.)

II. Déterminer un couple tel qu'en l'appliquant à la plaque tout en supprimant la liaison 2°, sans changer la première et sans modifier les conditions initiales, le mouvement reste le même.

Notations : M masse, R rayon de la plaque. Soient Oy

le diamètre de la plaque perpendiculaire à Ox , Oz la normale à la plaque, Ox_1 , Oy_1 des axes fixes formant avec Oz_1 un trièdre trirectangle. On prendra pour paramètres les angles

$$\widehat{x_1 O z} = \theta, \quad x_1 O x = \psi.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une demi-circonférence homogène de diamètre AB de milieu C a pour masse M , pour rayon R .

Déterminer : 1° son centre de gravité; 2° son moment d'inertie I par rapport à l'extrémité A .

La circonférence, étant placée dans un plan vertical et pouvant tourner autour du point A supposé fixe, constitue un pendule composé.

3° Calculer la durée des petites oscillations de ce pendule.

4° Déterminer les projections horizontale et verticale de la réaction du point fixe A lorsque le pendule passe la première fois par la position où AB est verticale, après avoir été abandonné sans vitesse dans la position où AB est horizontale et C en dessous de cette droite.

(Juillet 1909.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Le mouvement d'un trièdre mobile $Oxyz$ est défini à un instant t par les projections, sur ses arêtes, de la translation instantanée de l'origine et de la rotation instantanée :

$$u = \frac{\sqrt{2}}{1 + 2t^2}, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

$$p = \frac{1}{1 + 2t^2}, \quad q = 0, \quad r = \frac{1}{1 + 2t^2}.$$

Déterminer la trajectoire du sommet O du trièdre.

II. Dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe O , à un instant t , la vitesse instantanée de rotation est un vecteur $O\Omega$ et le moment cinétique résultant par rapport à O un vecteur $O\sigma$:

1° $O\sigma$ est perpendiculaire au plan conjugué de $O\Omega$ par rapport à l'ellipsoïde d'inertie relatif à O ;

2° Le moment résultant des forces d'inertie a pour mesure le double de l'aire du triangle $\Omega O\sigma$, si $O\Omega$ est fixe;

3° L'énergie cinétique du corps est $\frac{1}{2} O\Omega \cdot O\sigma \cos \widehat{\Omega O\sigma}$;

4° Le corps n'étant soumis à aucune force active donnée, le point Ω partira suivant la direction conjuguée du plan $\Omega O\sigma$ par rapport à l'ellipsoïde d'inertie;

5° Le moment cinétique résultant par rapport à une droite quelconque OL , de cosinus directeurs α, β, γ , ayant été calculé, on supposera que l'axe OL est subitement fixé à l'instant t , et l'on déterminera la nouvelle vitesse angulaire autour de OL , ainsi que la perte de force vive.

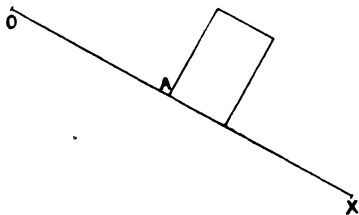
ÉPREUVE PRATIQUE. — Un cylindre circulaire droit de 0^m,10 de rayon, de 0^m,20 de hauteur, est terminé par un hémisphère de même rayon, et peut osciller autour d'un diamètre de la base plane, fixé horizontalement. La matière qui le constitue est homogène et de densité 1. L'axe de figure, écarté de 60° sur la verticale descendante, est abandonné sans vitesse.

Au bout de quel temps sera-t-il incliné pour la première fois de 30° sur cette verticale?

(Juin 1909.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Dans un plan vertical, sur une droite fixe OX faisant avec l'horizontale un angle α dont la tangente est 0,4, est placée une plaque rectangulaire



pesante et homogène qui est attachée au point fixe O par un fil élastique OA dont on néglige la masse. Ce fil s'allonge proportionnellement à sa tension; sa longueur

(415)

naturelle a doublerait sous une tension égale au poids de la plaque.

Le coefficient de frottement est 0,1.

Primitivement le système est sans vitesse et le fil est à l'état naturel.

Trouver le mouvement du système.

Quel doit être le rapport de la base à la hauteur de la plaque pour que le système ne bascule pas.

SOLUTION.

Première partie du mouvement : en posant $OA = x$

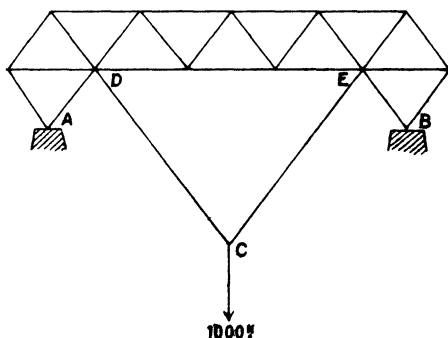
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}(x - a - 0,3a \cos \alpha) = 0,$$

$$x = a + 0,3a \cos \alpha \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \right),$$

$$v = 0,3a \cos \alpha \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t.$$

Le mouvement cesse au temps $t_1 = \pi \sqrt{\frac{g}{a}}$, alors

$$x_1 = a + 0,6a \cos \alpha.$$



Deuxième partie du mouvement : il n'y a pas équilibre en x_1 et les forces en jeu tendent à faire remonter le mobile. On a la nouvelle équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x - a - 0,5a \cos \alpha) = 0.$$

On en tire un nouvel arrêt après un nouveau temps t_1 et l'on vérifie qu'il y a équilibre.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un système articulé conforme à la figure précédente est formé de tiges qui ont toutes 1^m de longueur à l'exception des tiges CD et CE qui ont 3^m de long.*

Ce système repose par A et B sur deux appuis fixes situés dans un même plan horizontal.

En C on applique un poids de 1000^{kg}, trouver les tensions des tiges.

On néglige le poids des tiges.

Le système est dans un plan vertical.

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un corps solide peut tourner autour d'un axe vertical Oz.*

Dans ce corps est creusé un canal circulaire vertical de centre A dont le plan est perpendiculaire au plan AOz.

Dans ce canal peut se mouvoir un point pesant P de masse m.

La distance de A à Oz est égale au rayon R du canal et le moment d'inertie du corps solide par rapport à Oz est égal à $2mR^2$.

Primitivement le système est immobile et le point P est situé à l'extrémité du diamètre horizontal du canal.

Trouver le mouvement de ce système.

Évaluer en degrés l'amplitude du déplacement du corps solide.

SOLUTION.

Prenons Oz dirigé vers le bas, Ox et Oy perpendiculaires à Oz. En désignant par ψ l'angle de OA avec Ox, par θ l'angle de AP avec l'horizontale, par x, y, z les coordonnées de P, on a

$$\begin{aligned}x &= R \cos \psi - R \cos \theta \sin \psi, \\y &= R \sin \psi + R \cos \theta \cos \psi, \\z &= R \sin \theta.\end{aligned}$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à Oz donne

$$I\psi' + mR^2(1 + \cos^2\theta)\psi' - mR^2 \sin\theta\theta' = 0$$

ou

$$(1) \quad (3 + \cos^2 \theta) \psi' - \sin \theta \theta' = 0.$$

Le théorème des forces vives donne

$$I \psi'^2 + m R^2 (1 + \cos^2 \theta) \psi'^2 + m R^2 \theta'^2 - 2 m R^2 \sin \theta \theta' \psi' = 2 m g R \sin \theta$$

ou

$$(2) \quad (3 + \cos^2 \theta) \psi'^2 - 2 \sin \theta \theta' \psi' + \theta'^2 = 2 \frac{g}{R} \sin \theta.$$

De (1) et (2) on tire

$$(3) \quad \theta'^2 = \frac{g}{R} \frac{3 + \cos^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta} \sin \theta.$$

On voit que θ varie de 0 à π dans un temps fini et que, par suite, le point P exécute sur le canal des oscillations périodiques entre les deux extrémités du diamètre horizontal.

D'autre part, (1) donne pour l'amplitude de ψ et en posant $\cos \theta = u$,

$$\sqrt{3} \psi = \left(\arctan \frac{u}{\sqrt{3}} \right)_{-1}^{+1} = 60^\circ,$$

$$\psi = 34^\circ.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver les axes de l'ellipsoïde d'inertie relatif au sommet d'un parallélépipède droit à base rectangle de masse 1 et de côtés 1, 2, 3.*

(Juin 1909.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère une ellipse dont l'un des axes est horizontal et l'autre vertical. Un point pesant, placé en un sommet de l'axe horizontal, du côté de la concavité, est lancé sur la courbe avec une vitesse initiale v_0 dirigée suivant la verticale ascendante :*

1° *Examiner si le mobile quitte l'ellipse et, dans le cas où cela arrive, former l'équation qui détermine le point où se fait la séparation.*

2° *Si le mobile quitte l'ellipse, il se meut ensuite suivant une parabole. Peut-on choisir la vitesse initiale de manière que cette parabole passe par le centre de l'ellipse ?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Ox, y, z étant des axes rectangu-*
Ann. de Mathémat., 4^e série, t. X. (Septembre 1910.) 28

lares, on considère un solide homogène pesant, situé dans l'angle trièdre formé par les directions positives des axes, et limité par les surfaces

$$x^2 + 9z^2 = 9, \quad y^2 + 4z^2 = 4.$$

On suppose que ce solide oscille, comme un pendule composé, autour de la droite $z = 0$, $2x - 3y = 0$, prise comme axe de suspension, et l'on demande quelle est la longueur du pendule simple synchrone.

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Deux points matériels M et M', de masses m et m' , se meuvent sans frottement sur un plan horizontal fixe. Ils sont reliés par un fil élastique dont la longueur naturelle est a , et dont la tension est $\frac{\lambda mm'}{m + m'}(r - a)$, où λ est une constante donnée, lorsque sa longueur devient r ($r > a$). Étudier le mouvement des deux points.

Considérer, en particulier, le cas où, à l'instant initial, le fil a pour longueur $2a$, le point M est immobile et le point M' est animé d'une vitesse donnée v , perpendiculaire à la droite MM'. S'il arrive que le fil reprenne sa longueur naturelle, on ne poursuivra pas l'étude du mouvement. Cas où $v = 0$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un losange articulé, formé par quatre tiges homogènes, est mis en mouvement par une percussion donnée, normale à l'un de ses côtés, et située dans son plan. Trouver le mouvement initial.

(Juillet 1909.)

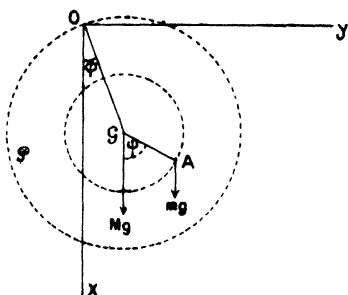
Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une plaque circulaire homogène pesante P, de masse M, de rayon R, est assujettie à tourner autour d'un axe fixe horizontal Oz normal à son plan en un point donné O de sa circonférence.

Un point matériel pesant A, de masse m , est assujetti à rester à l'intérieur ou sur la circonférence (C) d'un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ ayant même centre G que la plaque P et tracé sur cette plaque P.

A l'instant initial $t=0$ le système, après avoir été écarté de sa position d'équilibre [P en P_0 et A en A_0 sur (C)], est abandonné, sans vitesse initiale, à l'action de son poids.

On prendra pour paramètres définissant la position du



système les angles φ et ψ que font, à l'instant t , OG et GA avec la nadirale menée par O.

On demande :

1° D'écrire les équations différentielles du mouvement du système en appliquant la méthode de Lagrange ;

2° D'écrire ces mêmes équations en appliquant les théorèmes généraux ;

3° D'intégrer ces équations en supposant que les angles φ_0 et ψ_0 (à $t=0$) sont très petits et que, dans cette hypothèse, on néglige, dans les équations différentielles, les termes contenant les carrés ou produits de φ , ψ , $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$; montrer que φ et ψ sont alors de la forme

$$\varphi = A \cos \alpha t + B \cos \beta t, \quad \psi = C \cos \alpha t + D \cos \beta t,$$

où A, B, C, D, α , β sont des constantes par rapport à t ;

4° D'effectuer les calculs pour

$$\varphi_0 = 6' \quad \text{et} \quad \psi_0 = 15',$$

c'est-à-dire d'exprimer, dans cette hypothèse, A, B, C, D, α et β au moyen de g , R, M et m ;

5° De dire quand le mouvement est périodique et d'évaluer alors la période dans le cas 4° ;

6° D'évaluer, dans tous les cas, au moyen de φ , ψ et de

leurs dérivées par rapport à t , la pression exercée par le point A sur (C);

7° D'évaluer cette pression dans les cas particuliers 3° et 4° et de montrer que, dans ces cas, le mobile A ne quitte pas la circonférence (C).

(Juin 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Un corps solide homogène, non pesant, dont la masse est représentée par 35, a la forme d'une sphère de rayon R et peut tourner librement autour d'un point O de sa surface supposé fixe. Au centre G de la sphère est appliquée une force attractive, émanant d'un point fixe P distant du point O d'une longueur égale à R et ayant pour intensité $\frac{\mu^2}{PG^3}$, μ désignant une constante. Trouver le mouvement du solide, en supposant que le rayon OG soit d'abord incliné de 60° sur la direction fixe OP et que la sphère soit alors en rotation instantanée autour de ce rayon avec une vitesse angulaire égale à $\frac{\mu\sqrt{5}}{R^2\sqrt{2}}$. Déterminer la courbe décrite par le centre de la sphère.

(Octobre 1908.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Théorème du moment des quantités de mouvement des systèmes.

II. Un cylindre de révolution tourne librement autour de son axe horizontal. Il est muni d'un modérateur à ailettes, symétrique par rapport à l'axe, et dont le mouvement produit une résistance ayant par rapport à l'axe un moment proportionnel au carré de la vitesse de rotation.

Sur le cylindre est enroulé un fil dont la masse et l'épaisseur sont négligeables. L'une des extrémités du fil est attachée au cylindre, l'autre se déroule verticalement et supporte un poids P .

Étudier le mouvement du système.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver les moments principaux d'inertie d'un cône droit, homogène par rapport au centre de gravité. On désignera par h la hauteur du cône, par a le rayon de la base.

Pour quelle valeur du rapport $\frac{h}{a}$ l'ellipsoïde central d'inertie est-il une sphère?

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Établir les équations fondamentales de l'Hydrostatique. Discussion.*

II. *Un écrou pesant se meut sans frottement sur une vis inclinée d'un angle α sur l'horizon.*

Le centre de gravité de l'écrou est en dehors de l'axe de la vis.

Étudier et discuter les différentes circonstances du mouvement.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque pesante homogène, d'épaisseur négligeable, est mobile sans frottement autour d'un axe incliné de 45° sur l'horizon.*

La plaque a la forme d'un trapèze isocèle; l'une des bases, fixée à l'axe, a 1^m de long, l'autre $0^m,50$. La hauteur est de $0^m,50$.

Déterminer la durée des petites oscillations de la plaque sous l'influence de la pesanteur.

On donne

$$g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

(Juin 1909.)

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un fil sans masse est enroulé sur un cercle homogène de rayon R , et son extrémité libre est fixée en un point O d'un plan horizontal sur lequel le cercle posé à plat peut glisser sans frottement.*

Mouvement du système, le fil étant supposé tendu. (On ne considérera que la période du mouvement pendant laquelle le fil n'est pas entièrement déroulé.)

II. *Un corps solide étant rapporté à trois axes rectangulaires, on connaît à l'instant actuel les vitesses de trois points du corps :*

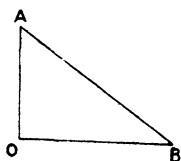
La vitesse du point de coordonnées $0, 0, 0$ a pour composantes $2, 1, -3$;

La vitesse du point de coordonnées $1, 1, 0$ a pour composantes $0, 3, -1$;

La vitesse du point de coordonnées $1, 1, 1$ a pour composantes $-1, 2, -1$.

Trouver les éléments actuels du mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire l'axe instantané de rotation et de glissement, la grandeur de la rotation, la grandeur du glissement.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un triangle matériel, homogène, pesant, OAB , est rectangle en O ; les longueurs des côtés sont : $OA = 3$, $OB = 4$. La masse totale est égale à l'unité.



Déterminer la direction des axes principaux d'inertie au point O , et calculer les moments principaux d'inertie en ce point.
(Juillet 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Un trièdre trirectangle $(T)(Ox, Oy, Oz)$ se meut dans le trièdre trirectangle (T_1) de façon que l'origine O se déplace dans le plan $(x_1O_1y_1)$ et que deux points invariables de l'axe Oz se déplacent respectivement dans les plans $(y_1O_1z_1)$, $(z_1O_1x_1)$; on demande :

1° De calculer les expressions les plus générales des éléments instantanés (translation et rotation) du mouvement de (T) ;

2° De montrer que Oz demeure constamment normal à une surface;

3° De déterminer les conditions à ajouter pour que la trajectoire d'un point invariable, donné, de l'axe Oz soit une circonférence.

II. Une circonférence matérielle homogène de masse M et de rayon r porte un anneau très petit de même masse qui peut glisser en frottant le long de la courbe (coefficient de frottement $f = \tan \alpha$) :

1° On demande d'étudier le mouvement du système lancé dans un plan vertical et soumis à l'action de la pesanteur;

2^e Mouvement relatif de l'anneau et de la circonférence.

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1. Un disque circulaire, homogène, pesant, est attaché par son centre C à une extrémité d'une barre pesante, homogène, OC, dont l'autre extrémité O est fixe. La barre peut tourner autour de O, le disque peut tourner autour de C, et le système tout entier reste contenu dans un plan vertical fixe.

Masse du disque : M; rayon du disque : $a\sqrt{2}$; masse de la barre : 3M; longueur de la barre : 2a. On suppose $\frac{g}{a} = 5$, g étant l'accélération de la pesanteur.

A l'instant initial, la barre est horizontale et sans vitesse, le disque est animé d'une vitesse de rotation de ω_0 :

1^o Trouver le mouvement du système; indiquer comment on calculerait les réactions qui s'exercent en O et en C.

2^o Au moment où la barre passe par la verticale, le disque se trouve subitement lié à la barre d'une façon invariable par une liaison nouvelle. Trouver le nouveau mouvement que prendra la barre, et indiquer les valeurs de ω_0 pour lesquelles ce mouvement sera révolutif, ou oscillatoire, ou bien s'arrêtera complètement.

II. Le mouvement d'un système à liaisons complètes étant défini par l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = (\cos x - a) \sin x,$$

où a désigne un nombre positif donné, trouver les positions d'équilibre stable, et la durée des petites oscillations autour de ces positions, suivant les différentes valeurs de a.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une plaque homogène a la forme d'un triangle rectangle AOB rectangle en O. On donne OA = a, OB = b et l'on mène par O une droite parallèle à l'hypoténuse.

Déterminer sur cette droite le point M pour lequel elle est axe principal d'inertie, et calculer les moments principaux en ce point.

(Juillet 1909.)